KONU 7. STURM-LİOUVİLLE DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

Aşağıdaki

$$-y^{''}+q(x)\,y=\lambda y, \quad 0\leq x\leq \pi \tag{7.1}$$

$$y(0)=a_1, \quad y^{'}(0)=a_2 \tag{7.2}$$

başlangıç değer problemlerini (BDP) göz önüne alalım, burada $q\_$ reel değerli, sürekli bir fonksiyon ve $a_1, a_2 \in \mathbb{R}'$ dir.

Teorem 7.1. $(7.1)-(7.2)$ başlangıç değer probleminin her bir çözümü

$$y(x)=a_2x+a_1+\int_0^x (x-s)\,[q(s)-\lambda]\,y(s)\,ds, \tag{7.3}$$

integral denkleminin çözümüdür. Tersine (7.3) integral denkleminin her bir çözümü $(7.1)-(7.2)$ BDP' nin çözümüdür.(Yani $(7.1),(7,2)\Leftrightarrow(7.3)$)

İspat. Önce $(7.1),(7.2)\Longrightarrow(7.3)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
y^{''} &= [q(x)-\lambda]\,y \\
y'(x)-y^{'}(0) &= \int_0^x [q(s)-\lambda]\,y(s)\,ds \\
y^{'}(x) &= a_2+\int_0^x [q(s)-\lambda]\,y(s)\,ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(x)-y(0) &= a_2x+\int_0^x\int_0^t [q(s)-\lambda]\,y(s)\,dsdt \\
y(x) &= a_2x+a_1+\int_0^x\int_0^t [q(s)-\lambda]\,y(s)\,dsdt \\
y(x) &= a_2x+a_1+\int_0^x\int_s^x [q(s)-\lambda]\,y(s)\,dtds \\
y(x) &= a_2x+a_1+\int_0^x (x-s)\,[q(s)-\lambda]\,y(s)\,ds
\end{aligned}$$

Şimdi $(7.3)\Longrightarrow(7.1),(7.2)$ olduğunu gösterelim.

$$y(x)=a_2x+a_1+\int_0^x (x-s)\,[q(s)-\lambda]\,y(s)\,ds$$

Buradan

$$y(0) = a_1$$

elde edilir. (7.3) integral denklemini diferansiyelleyerek

$$y^{'}(x) = a_2 + \int\limits_0^x [q(s) - \lambda]\, y(s)\, ds \tag{7.4}$$

elde edilir. $(7.4)'$ den

$$y^{'}(0) = a_2$$

çıkar. İkinci kere (7.4) eşitliğini diferansiyelleyerek

$$y^{''}(x) = [q(x) - \lambda]\, y(x), \quad 0 \le x \le \pi$$

veya

$$-y^{''} + q(x)\, y = \lambda y, \quad 0 \le x \le \pi$$

Alıştırmalar

1.

$$\begin{aligned} -y^{''} + e^x y &= \lambda y, \quad 0 \le x \le 1 & (7.5) \\ y(0) &= 2, \quad y^{'}(0) = -1 & (7.6) \end{aligned}$$

BDP' i ve

$$y(x) = -x + 2 + \int\limits_0^x (x - t)\left[e^t - \lambda\right] y(t)\, dt, \quad x \in [0, 1] \tag{7.7}$$

integral denklemi verilsin.

$$(7.5), (7.6) \Longleftrightarrow (7.7)$$

olduğunu ispatlayınız.