KONU 8. STURM LİOUVİLLE DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ DEVAMI

$$-y'' + q(x)\,y = s^2 y, \quad 0 \le x \le \pi \tag{8.1}$$

denkleminin

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = h \tag{8.2}$$

ve

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \tag{8.3}$$

başlangıç koşullarını gerçekleyen çözümlerini sırasıyla $\vartheta\left(x, s^2\right)$ ve $\psi\left(x, s^2\right)$ ile gösterelim. Aşağıdaki integral denklemlerini göz önünde bulunduralım.

$$\vartheta\left(x, s^2\right) = \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \int_0^x \frac{\sin s\,(x-t)}{s} q(t)\,\vartheta\left(t, s^2\right) dt \tag{8.4}$$

$$\psi\left(x, s^2\right) = \frac{\sin sx}{s} + \int_0^x \frac{\sin s\,(x-t)}{s} q(t)\,\psi\left(t, s^2\right) dt \tag{8.6}$$

Teorem 8.1.$(8.1), (8.2) \Leftrightarrow (8.4)$ gerçeklenir.

İspat. $(8.1), (8.2) \Rightarrow (8.4)$ olduğunu gösterelim. (8.1) denklemini

$$y'' + s^2 y = q(x)\,y, \quad 0 \le x \le \pi \tag{8.6}$$

biçiminde yazalım. (8.6) denkleminin genel çözümünü sabitlerin değişimi yöntemi ile bulalım. (8.6) denkleminin homojen denklemi

$$y'' + s^2 y = 0, \quad 0 \le x \le \pi \tag{8.7}$$

biçimindedir. (8.7) denkleminin genel çözümü

$$\widetilde{y}(x) = c_1 \cos sx + c_2 \sin sx, \quad |c_1| + |c_2| \ne 0$$

olsun. (8.6) denkleminin genel çözümünü ise

$$y(x) = c_1(x) \cos sx + c_2(x) \sin sx, \tag{8.8}$$

biçiminde arayalım ve $c_1(x)$, $c_2(x)$ fonksiyonlarını öyle seçelim ki, (8.8) fonksi yonu (8.6) denkleminin çözümü olsun. $(8.8)'$ den

$$y'(x) = c_1'(x) \cos sx + c_2{\prime}(x) \sin sx - s c_1(x) \sin sx + s c_2(x) \cos sx$$

bulunur. Buradan

$$c_1'(x) \cos sx + c_2{\prime}(x) \sin sx = 0 \tag{8.9}$$

seçerek

$$y'(x) = -s c_1(x) \sin sx + s c_2(x) \cos sx$$

elde edilir. Sonuncu eşitlikten

$$y''(x) = -s^2 \left[c_1(x)\cos sx + c_2(x)\sin sx\right] - sc_1'(x)\sin sx + sc_2'(x)\cos sx$$

çıkar. Bu eşitliği (8.6) denkleminde dikkate alalım.

$$-c_1'(x)\sin sx + c_2'(x)\cos sx = \frac{q(x)}{s}y(x) \tag{8.10}$$

Sonuncu denklemi (8.9) ile birlikte denklemler sistemi olarak çözelim. (8.9) ve (8.10) denklemler sisteminden

$$\begin{cases} c_1'(x) = & -\dfrac{q(x)}{s}y(x)\sin sx \\ c_2'(x) = & -\dfrac{q(x)}{s}y(x)\cos sx \end{cases}$$

elde edilir. Buradan

$$c_1(x) = \alpha_1 - \int_0^x \frac{\sin st}{s} q(t)\, y(t)\, dt, \tag{8.11}$$

$$c_2(x) = \alpha_2 + \int_0^x \frac{\cos st}{s} q(t)\, y(t)\, dt, \tag{8.12}$$

burada

$$\alpha_1 = c_1(0), \quad \alpha_2 = c_2(0)$$

olmak üzere sabitlerdir. (8.11) ve (8.12) eşitlikleri (8.8) denkleminde göz önüne alınırsa

$$y(x) = \alpha_1 \cos sx + \alpha_2 \sin sx + \int_0^x \frac{\sin s(x-t)}{s} q(t)\, y(t)\, dt, \tag{8.13}$$

elde edilir. (8.2) başlangıç koşullarını kullanarak (8.13) den $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \dfrac{h}{s}$ elde edilir. Bu değerleri (8.13) denkleminde yazarak $\vartheta\left(x, s^2\right)$ çözümü için

$$\vartheta\left(x, s^2\right) = \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \int_0^x \frac{\sin s(x-t)}{s} q(t)\, \vartheta\left(t, s^2\right) dt$$

integral denklemi bulunur.

Şimdi tersine $(8.4) \Rightarrow (8.1), (8.2)$ olduğunu gösterelim. $(8.4)'$ den

$$\vartheta\left(0, s^2\right) = 1, \ \vartheta'\left(0, s^2\right) = h$$

çıkar. (8.4) iki kere diferensiyelleyerek

$$-\vartheta\left(x,s^{2}\right)^{''}+q\left(x\right)\vartheta\left(x,s^{2}\right)=s^{2}\vartheta\left(x,s^{2}\right),\quad 0\leq x\leq\pi$$

elde edilir.

Alıştırmalar.

1) (8.1), $(8.3)\Leftrightarrow(8.5)$ olduğunu ispatlayınız.