KONU 9. ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI VE TEKLİĞİ
Aşağıdaki

$$-y^{''}+q(x)\,y = \lambda y, \quad 0\leq x\leq \pi \tag{9.1}$$
$$y(0) = a_1, \quad y^{'}(0)=a_2 \tag{9.2}$$

BDP' ni göz önünde bulunduralım, burada $a_1,\ a_2\in\mathbb{R}$ ve q reel değerli sürekli bir fonksiyondur.

Teorem 9.1. $(9.1)\,,(9.2)$ başlangıç değer probleminin çözümü vardır, tektir ve λ' nın tam fonksiyonudur.

ispat. $(9.1)\,,(9.2)$ BDP nin her çözümünün

$$y(x,\lambda)=a_1+a_2x+\int\limits_0^x (x-s)\left[q(s)-\lambda\right]y(s,\lambda)\,ds,\ \ x\in[0,\pi] \tag{9.3}$$

integral denklemininde bir çözümüdür. Teoremi (9.3) integral denklemi için ispatlayalım. Bu nedenle (9.3) integral denkleminde ardışık yaklaşımlar yöntemini kullanalım.

$$\begin{aligned} y_0(x,\lambda) &= a_1+a_2x \\ y_n(x,\lambda) &= \int\limits_0^x (x-s)\left[q(s)-\lambda\right]y_{n-1}(s,\lambda)\,ds \end{aligned} \tag{9.4}$$

olarak tanımlayalım. Eğer

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x,\lambda)$$

serisi düzgün yakınsak ise, bu durumda

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x,\lambda) &= y_0(x,\lambda)+\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,\lambda)\\ &= a_1+a_2x+\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^x (x-s)\left[q(s)-\lambda\right]y_{n-1}(s,\lambda)\,ds\\ &= a_1+a_2x+\int\limits_0^x (x-s)\left[q(s)-\lambda\right]\sum_{n=1}^{\infty} y_{n-1}(s,\lambda)\,ds\\ &= a_1+a_2x+\int\limits_0^x (x-s)\left[q(s)-\lambda\right]\sum_{n=0}^{\infty} y_n(s,\lambda)\,ds\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuncu eşitlikten

$$y(x,\lambda):\ =\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x,\lambda) \tag{9.5}$$

ise

$$y(x,\lambda) = a_1 + a_2 x + \int\limits_0^x (x-s)\left[q(s)-\lambda\right] y(s,\lambda)\, ds$$

sağlanır, yani (9.5) serisinin toplamı (9.3) denklemini gerçekler. Şimdi (9.5) serisinin düzgün yakınsak olduğunu ispatlayalım.

$$|q(x)| \leq M, \quad |y_0(x)| \leq K, \quad x \in [0,\pi]$$

ve $|\lambda| \leq N$ olmak üzere (9.4) eşitliğinden

$$\begin{aligned} |y_1(x,\lambda)| &\leq \int\limits_0^x (x-s)\,|q(s)-\lambda|\,|y_0(s,\lambda)|\, ds \\ &\leq (M+N)\int\limits_0^x x\,|y_0(s,\lambda)|\, ds \\ &\leq (M+N)\,\pi K \int\limits_0^x ds = (M+N)\,\pi K \frac{x}{1!} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$|y_2(x,\lambda)| \leq (M+N)^2\,\pi^2 K \frac{x^2}{2!}$$

bulunur. Tümevarım yöntemini kullanalım. Varsayalım ki,

$$|y_k(x,\lambda)| \leq (M+N)^k\,\pi^k K \frac{x^k}{k!}$$

gerçeklensin. Bu durumda

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x,\lambda)| &\leq \int\limits_0^x (x-s)\left[|q(s)|+|\lambda|\right]|y_k(s,\lambda)|\, ds \\ &\leq (M+N)^{k+1}\,\pi^{k+1} K \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

sağlanır. Buradan

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x,\lambda)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |y_n(x,\lambda)| \leq K e^{(M+N)\pi x}$$

elde edilir. Bu ise (9.5) serisinin düzgün yakınsaklığı anlamına gelir. Dolayısıyla (9.3) denkleminin (hem de (9.1), (9.2) probleminin) çözümü vardır, tektir ve λ' nın tam fonksiyonudur.

Alıştırmalar.

1)

$$\left\{ \begin{array}{c} -y'' + q\,(x)\, y = s^2 y, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ y\,(0) = 1, \quad y'\,(0) = h \end{array} \right.$$

başlangıç değer probleminin çözümü vardır, tektir ve s' nin tam fonksiyonudur.

2)

$$\left\{ \begin{array}{c} -y'' + q\,(x)\, y = s^2 y, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ y\,(0) = 0, \quad y'\,(0) = 1 \end{array} \right.$$

başlangıç değer probleminin çözümünün varlığını, tekliğini ve s' nin tam fonksiyonu olduğunu gösteriniz