

KONU 10. FONKSİYONLARIN ASİMPTOTİĞİ

Tanım 10.1. Eğer $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı ise

$$f(x) = O(1), \quad x \in [a, b]$$

olarak tanımlanır, yani

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow f(x) = O(1), \quad \forall x \in [a, b].$$

Benzer olarak

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M, \quad \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow f(x) = O(g(x)), \quad \forall x \in [a, b]$$

yazılır. Aynı şekilde

$$\left| \frac{f(x) - v(x)}{g(x)} \right| \leq M, \quad \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow f(x) = v(x) + O(g(x)), \quad \forall x \in [a, b]$$

tanımlanır. Eğer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ mevcut ve sınırlı ise, bu özellik

$$f(x) = O(1), \quad x \rightarrow a$$

asimptotik eşitliği ile yazılır.

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \rightarrow \infty$$

ve

$$f(x) = v(x) + O(g(x)), \quad x \rightarrow -\infty$$

benzer biçimde tanımlanır.

$O(1)$ asimptotik ifadesinden farklı olarak $o(1)$ asimptotik ifadesi sıfıra yakınsama anlamında kullanılır.

$$f(x) = o(1), \quad x \rightarrow \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Aynı şekilde

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a$$

ve

$$f(x) = v(x) + o(g(x)), \quad x \rightarrow a$$

tanımlanır.

Soru 10.2.

$$\cos x = 1 + O(x^2) \quad x \rightarrow 0$$

asimptotik eşitliğini ispatlayınız.

Çözüm.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

limitinin mevcut ve sınırlı bir sayı olduğunu gösterelim.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin x}{2x} \right) = -\frac{1}{2}$$

olduğundan

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = O(1), \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x = 1 + O(x^2), \quad x \rightarrow 0$$

Soru 10.3.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3), \quad x \rightarrow 0$$

olduğunu isptlayınız.

Çözüm.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}$$

olduğundan asimptotik eşitlik sağlanır.

Soru 10.4.

$$x \arctan x - \frac{\pi}{2}x + \beta = o(1), \quad x \rightarrow \infty$$

asimptotik eşitliği gerçekleşiyorsa β kaçtır?

Çözüm.

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \arctan x - \frac{\pi}{2}x \right] + \beta = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) \right] + \beta \\ 0 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} + \beta = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} + \beta = -1 + \beta \\ 0 &= -1 + \beta \Rightarrow \beta = 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırmalar.

- 1) $\sin x = x + o(x^2)$, $x \rightarrow 0$ eşitliğini ispatlayınız.
- 2) $\frac{x}{1+x^3} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $x \rightarrow \infty$ asimptotik eşitliğini gösteriniz.
- 3) $\ln(1+x) = x + O(x^2)$, $x \rightarrow 0$ eşitliğinin doğruluğunu ispatlayınız.