KONU 11. DİZİLERİN ASİMPTOTİĞİ

Fonksiyonlara benzer olarak diziler içinde asimptotik eşitlikler tanımlanır. Örneğin

$$\begin{aligned}\alpha_n &= 1+O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} n\left(\alpha_n-1\right) \text{ mevcut ve sınırlı}\\ \beta_n &= n+o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left[n\left(\beta_n-n\right)\right]=0\end{aligned}$$

gibi tanımlanır.

Dizilerin asimptotiğinde aşağıdaki eşitlikler sık sık kullanılır.

1) $O\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty$

2) $O\left(n\right)+o\left(n\right)=O\left(n\right), \quad n\to\infty$

3) $O\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(1\right)=O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty$

4) $O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty$

5) $o\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty$

Soru 11.1.

$$\alpha_n = 1+O\left(\frac{1}{n}\right),\ n\to\infty$$

gerçekleniyor ise

$$\alpha_n^2 = 1+O\left(\frac{1}{n}\right),\ n\to\infty$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned}\alpha_n^2 &= \left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2 = 1+2O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= 1+O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=1+O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty\end{aligned}$$

Soru 11.2.

$$\alpha_n^2 = 1+O\left(\frac{1}{n}\right),\ n\to\infty$$

sağlanıyorsa, $\frac{1}{\alpha_n}$ dizisinin $n\to\infty$ için asimptotiğini bulunuz.

Çözüm.

$$\alpha_n^2 = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + 2O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

veya

$$\alpha_n^2 = \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2, \quad n \to \infty$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha_n = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty$$

çıkar. Sonuncu eşitlikten

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_n} &= \frac{1}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1+O\left(\frac{1}{n}\right)-O\left(\frac{1}{n}\right)}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]+O\left(\frac{1}{n}\right)}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= 1+\frac{O\left(\frac{1}{n}\right)}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)} = 1+\frac{O\left(\frac{1}{n}\right)}{1} = 1+O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty\end{aligned}$$

yani

$$\frac{1}{\alpha_n} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty$$

sağlanır.

Soru 11.3. $f \in C'[0,\pi]$ olmak üzere

$$\int_0^\pi f(x)\cos nx dx = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Kısmi integrasyon yardımı ile

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx &= \frac{1}{n}\int_0^\pi f(x)\, d\sin nx \\ &= \frac{1}{n}\left[f(x)\sin nx|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\sin nx dx\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[f(\pi)\sin n\pi - \int_0^\pi f'(x)\sin nx dx\right]\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$f(\pi)\sin n\pi - \int_0^\pi f'(x)\sin nx dx$$

fonksiyonu her n için (özel durumda $n \to \infty$ içinde) sınırlı olduğundan

$$f(\pi)\sin n\pi - \int_0^{\pi} f'(x)\sin nx dx = O(1),\ n \to \infty$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx &= \frac{1}{n}\left[f(\pi)\sin n\pi - \int_0^{\pi} f'(x)\sin nx dx\right] \\ &= \frac{1}{n}O(1) = O\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty\end{aligned}$$

olur.

Alıştırmalar.

1)

$$\alpha_n = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty$$

sağlanıyorsa, $\dfrac{1}{\alpha_n^2}$ dizisinin $n \to \infty$ için asimptotiğini bulunuz.

2)

$$\begin{aligned}\lambda_n &= 1 + O\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty \\ \mu_n &= 1 + O\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty\end{aligned}$$

ise $\dfrac{\lambda_n}{\mu_n}$ dizisinin $n \to \infty$ için asimptotiğini bulunuz.

3)

$$a_n = \gamma + o\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty$$

ise $b_n = \sqrt[3]{a_n}$ dizisinin $n \to \infty$ için gerçeklediği asimptotik eşitliği bulunuz.

4)

$$\beta_n = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n \to \infty$$

ise β_n^2' nin asimptotiğini elde ediniz.