KONU 12. STURM LİOUVİLLE DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ASİMPTOTİĞİ

$$-y'' + q(x)\,y = s^2 y, \quad 0 \le x \le \pi \tag{12.1}$$

denkleminin

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = h \tag{12.2}$$

başlangıç koşullarını gerçekleyen çözümü $\upsilon\left(x, s^2\right)$ olmak üzere

$$\upsilon\left(x, s^2\right) = \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \int_0^x \frac{\sin s(x-\tau)}{s} q(\tau)\,\upsilon\left(\tau, s^2\right) d\tau \tag{12.3}$$

integral denklemini gerçeklenir.

Teorem 12.1. $s = \sigma + it$ olmak üzere $\exists\ s_0 > 0$ sayısı vardır ki

$$\upsilon\left(x, s^2\right) = O\left(e^{|t|x}\right), \quad |s| > s_0 \tag{12.4}$$

$$\upsilon\left(x, s^2\right) = \cos sx + O\left(\frac{e^{|t|x}}{s}\right), \quad |s| > s_0 \tag{12.5}$$

asimptotik eşitliklerini gerçeklenir.

İspat. (12.3) denkleminin her iki tarafını $e^{-|t|x}$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned}\upsilon\left(x, s^2\right) e^{-|t|x} &= (\cos sx)\, e^{-|t|x} + \frac{h \sin sx}{s} e^{-|t|x} \\ &+ \int_0^x \frac{\sin s(x-\tau)}{s} e^{-|t|x+|t|\tau} e^{-|t|\tau} \upsilon\left(\tau, s^2\right) q(\tau)\, d\tau\end{aligned}$$

$f(x) := \upsilon\left(x, s^2\right) e^{-|t|x}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}f(x) &= (\cos sx)\, e^{-|t|x} + \frac{h \sin sx}{s} e^{-|t|x} \\ &+ \int_0^x \frac{\sin s(x-\tau)}{s} e^{-|t|(x-\tau)} q(\tau)\, f(\tau)\, d\tau\end{aligned} \tag{12.6}$$

elde edilir. $\left|(\cos sx)\, e^{-|t|x}\right| \le 1$, $\left|(\sin sx)\, e^{-|t|x}\right| \le 1$ olduğundan $M = \max\limits_{x \in [0,\pi]} |f(x)|$ tanımlayarak (12.6) denkleminden

$$M \le 1 + \frac{|h|}{|s|} + \frac{M}{|s|} \int_0^x |q(\tau)|\, d\tau$$

veya

$$M \le 1 + \frac{|h|}{|s|} + \frac{M}{s} \int_0^\pi |q(\tau)|\, d\tau$$

elde edilir. Sonuncu eşitsizlikten

$$M\left[1-\frac{1}{|s|}\int\limits_0^{\pi}|q(\tau)|\,d\tau\right]\leq 1+\frac{|h|}{|s|} \tag{12.7}$$

çıkar. $s_0 :=\int\limits_0^{\pi}|q(\tau)|\,d\tau$ için, $|s|>s_0$ olduğundan

$$1-\frac{s_0}{|s|}>0$$

olur.(12.7) den

$$M\leq\left(1-\frac{s_0}{|s|}\right)^{-1}\left(1+\frac{|h|}{|s|}\right) \tag{12.8}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten

$$M=O(1)\,,\quad |s|>s_0$$

veya

$$\max_{x\in[0,\pi]}\left|\upsilon\left(x,s^2\right)e^{-|t|x}\right|=O(1)\,,\quad |s|>s_0$$

yazılır. Buradan

$$\upsilon\left(x,s^2\right)e^{-|t|x}=O(1)\,,\quad x\in[0,\pi]\,,\quad |s|>s_0$$

veya

$$\upsilon\left(x,s^2\right)=O\left(e^{|t|x}\right),\quad x\in[0,\pi]\,,\quad |s|>s_0$$

bulunur. Şimdi (12.5) eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned}\upsilon\left(x,s^2\right)-\cos sx &= \frac{h}{s}\sin sx+\int\limits_0^x\frac{\sin s(x-\tau)}{s}q(\tau)\,\upsilon\left(\tau,s^2\right)d\tau\\ s\left[\upsilon\left(x,s^2\right)-\cos sx\right]e^{-|t|x} &= h(\sin sx)\,e^{-|t|x}\\ &\quad+\int\limits_0^x\sin s(x-\tau)\,e^{-|t|(x-\tau)}q(\tau)\,\upsilon\left(\tau,s^2\right)e^{-|t|\tau}d\tau\end{aligned}$$

Buradan

$$s\left[\upsilon\left(x,s^2\right)-\cos sx\right]e^{-|t|x}=O(1)\,,\quad x\in[0,\pi]\,,\quad |s|>s_0$$

veya

$$\upsilon\left(x,s^2\right)=\cos sx+O\left(\frac{e^{|t|x}}{s}\right),\quad x\in[0,\pi]\,,\quad |s|>s_0$$

bulunur.

Alıştırmalar.

1) (12.1) denkleminin

$$y(0)=1, \quad y'(0)=0$$

başlangıç koşullarını gerçekleyen $\psi\left(x,s^2\right)$ çözümü için

$$\begin{aligned}
\psi\left(x,s^2\right) &= O\left(\frac{e^{|t|x}}{s}\right), \quad x\in[0,\pi], \quad |s|>s_0 \\
\psi\left(x,s^2\right) &= \frac{\sin sx}{s}+O\left(\frac{e^{|t|x}}{s}\right), \quad x\in[0,\pi], \quad |s|>s_0
\end{aligned}$$

olduğunu gösteriniz.