KONU 13. ÖZDEĞERLERİN ASİMPTOTİĞİ

$$-y^{''}+q\left(x\right)y=\pi,\quad 0\leq x\leq\pi \tag{13.1}$$

$$\begin{cases} y^{'}\left(0\right)-hy\left(0\right)=0 \\ y^{'}\left(\pi\right)+Hy\left(\pi\right)=0 \end{cases} \tag{13.2}$$

ve $h\neq\pm\infty$, $H\neq\pm\infty$ olduğunu varsayalım. $\lambda=s^2$ olmak üzere (13.1) denkleminin

$$y\left(0\right)=1,\quad y^{'}\left(0\right)=h$$

başlangıç koşulları gerçekleyen çözümü $\upsilon\left(x,s^2\right)$ olsun.

$$X\left(s\right)=\upsilon'\left(\pi,s^2\right)+H\upsilon\left(\pi,s^2\right) \tag{13.3}$$

fonksiyonu tanımlayalım. L operatörünün özdeğerleri kümesini $\sigma_d\left(L\right)$ ile gösterelim.

Teorem 13.1.

$$\sigma_d\left(L\right)=\left\{\lambda:\ \lambda=s^2,\ s\in\mathbb{R},\ X\left(s\right)=0\right\}$$

İspat. $\upsilon\left(x,s^2\right)$ fonksiyonu (13.1) denklemini ve (13.2) sınır koşullarından birini gerçekler. $\lambda=s^2$, $s\in\mathbb{R}$ olmak üzere (13.2) sınır koşullarının ikincisinin gerçeklenmesi $\upsilon\left(x,s^2\right)$ fonksiyonunun (13.1) , (13.2) sınır değer probleminin $\lambda=s^2$ için çözümü olacağından teoremin ispatı elde edilir.

Şimdi (13.3) denklemini ve $\upsilon\left(x,s^2\right)$ çözümünün $\operatorname{Im}s=t=0$ için aşağıdaki

$$\upsilon\left(x,s^2\right)=\cos sx+O\left(\frac{1}{s}\right),\quad |s|>s_0$$

ve

$$\upsilon'\left(x,s^2\right)=s\sin sx+O\left(1\right),\quad |s|>s_0$$

asimptotiklerini kullanarak, özdeğerlerin kareökü için

$$-s\sin s\pi+O\left(1\right)=0,\quad s\in\left(-\infty,-s_0\right)\cup\left(s_0,\infty\right) \tag{13.4}$$

asimptotik denklemi elde edilir. (13.4) denkleminin kökleri s_n olmak üzere

$$s_n=n+\delta_n,\quad \lim_{n\to\infty}=0 \tag{13.5}$$

biçimindedir. $(13.4)'$ den

$$-\left(n+\delta_n\right)\sin\left(\pi n+\delta_n\pi\right)+O\left(1\right)$$

veya

$$\sin\delta_n\pi=O\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\to\infty \tag{13.6}$$

asimptotik eşitliği ile aynıdır. (13.5) ve (13.6)' dan

$$s_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty \tag{13.7}$$

olur. L operatörünün özdeğerleri $\lambda_n = s_n^2$ olmak üzere

$$\lambda_n = n^2 + O(1), \quad n \to \infty \tag{13.8}$$

bulunur. Sonuncu asimptotik eşitlik $q \in C[0,\pi]$ için geçerlidir. Eğer $q \in C'[0,\pi]$ ise (13.7) asimptotik eşitliği

$$s_n = n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty \tag{13.9}$$

biçiminde olur, burada

$$c = \frac{1}{\pi}\left[h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt\right]$$

ile tanımlanır. Bu durumda (13.8) ise

$$\lambda_n = n^2 + 2c + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty \tag{13.10}$$

biçiminde sağlanır.

Alıştırmalar.

1) $\upsilon\left(x, s^2\right)$ çözümünün asimptotiğini ve (13.3) denklemini kullanarak $q \in C'[0,\pi]$ için (13.9) asimptotik eşitliğini elde ediniz.