KONU 14. ÖZFONKSİYONLARIN ASİMPTOTİĞİ

$q \in C^1[0,\pi]$, $h,\ H \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$-y'' + q(x)\,y = \pi, \quad 0 \le x \le \pi$$

$$\begin{cases} y'(0) - hy(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin ürettiği Sturm-Liouville L operatörünün özfonksiyonlarının asimptotiğini bulalım.

$$\begin{aligned} s_n &= n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty \qquad (14.1) \\ \lambda_n &= s_n^2 = n^2 + c + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty \end{aligned}$$

$$\upsilon\left(x, s^2\right) = \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \int_0^x \frac{\sin s(x-\tau)}{s} q(\tau)\,\upsilon\left(\tau, s^2\right) d\tau \qquad (14.2)$$

L operatörünün $\lambda_n = s_n^2$ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu
$\upsilon(x,\lambda) = \upsilon\left(x, s^2\right) = \upsilon_n(x)$ olmak üzere

$$\upsilon(x, \lambda_n) = \cos s_n x + O\left(\frac{1}{s_n}\right), \quad n \to \infty$$

eşitliğinden ve (14.2) den

$$\begin{aligned} \upsilon_n(x) &= \cos s_n x + \frac{h}{s_n}\sin s_n x + \frac{1}{s_n}\int_0^x \sin s_n(x-\tau)\cos s_n\tau\, q(\tau)\,d\tau + O\left(\frac{1}{s_n^2}\right) \\ &= \cos s_n x + \frac{h}{s_n}\sin s_n x + \frac{\sin s_n x}{2s_n}\int_0^x q(\tau)\,d\tau + O\left(\frac{1}{s_n^2}\right), \quad n \to \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuncu eşitlikte (14.1) i dikkate alalım,

$$\begin{aligned} &= \cos nx - \frac{cx}{n}\sin nx + \frac{h}{n}\sin nx + \frac{\sin nx}{2n}\int_0^x q(\tau)\,d\tau + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ &= \cos nx + \frac{\beta(x)}{n}\sin nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty, \end{aligned}$$

burada

$$\beta(x) = -cx + h + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\,d\tau$$

ile tanımlanır.

$$\upsilon_n(x) = \cos nx + \frac{\beta(x)}{n}\sin nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty \tag{14.3}$$

eşitliğine özfonksiyonların asimptotiği denir.

$$\alpha_n^2 : = \int_0^\pi \upsilon_n^2(x)\,dx = \int_0^\pi \cos^2 nx dx + \frac{1}{n}\int_0^\pi \beta(x)\sin 2nx dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{14.4}$$

olup buradan

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \beta(x)\sin 2nx dx &= O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty \\ \int_0^\pi \cos^2 nx dx &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

olduğundan (14.4) eşitliğinden

$$\alpha_n^2 = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty$$

veya

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right], \quad n \to \infty \tag{14.5}$$

bulunur. (14.3) ve (14.5) eşitlikleri kullanılarak ortanormal özfonksiyonlar için

$$V_n(x) = \frac{\upsilon_n(x)}{\alpha_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\cos nx + \frac{\beta(x)}{n}\sin nx\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty$$

asimptotik eşitliği elde edilir.