KONU 1. VEKTÖR DEĞERLİ L_1 VE L_2 UZAYLARI

$f_1, f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned} L_1(0,\infty;\mathbb{R}^2) \quad : \quad &= \left\{ f : f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix},\ f_1, f_2 \in L_1(0,\infty) \right\} \\ &= \left\{ f : f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix},\ \int\limits_0^\infty (|f_1(x)| + |f_2(x)|)\, dx < \infty \right\}, \end{aligned}$$

ve

$$L_2(0,\infty;\mathbb{R}^2) := \left\{ f : f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix},\ f_1, f_2 \in L_2(0,\infty) \right\}$$

olarak tanımlanır. Benzer biçimde $L_1(-\infty,\infty;\mathbb{R}^2)$ ve $L_2(-\infty,\infty;\mathbb{R}^2)$ vektör değerli fonksiyon uzayları da tanımlanır.

$L_1(0,\infty;\mathbb{R}^2)$ uzayı bir Banach uzayı olup bu uzayda $f(x) = \binom{f_1(x)}{f_2(x)}$ vektör değerli fonksiyonunun normu

$$||f||_1 := \int\limits_0^\infty (|f_1(x)| + |f_2(x)|)\, dx$$

olarak tanımlanır. $L_2(0,\infty;\mathbb{R}^2)$ uzayı ise bir Hilbert uzayı olup, bu uzaydaki $f(x) = \binom{f_1(x)}{f_2(x)}$, $g(x) = \binom{g_1(x)}{g_2(x)}$ vektör değerli fonksiyonlarının iç çarpımı

$$(f,g) := \int\limits_0^\infty [f_1(x)\, g_1(x) + f_2(x)\, g_2(x)]\, dx$$

olarak tanımlanır. $L_2(0,\infty;\mathbb{C}^2)$ uzayında ise iç çarpım

$$(f,g) := \int\limits_0^\infty \left[f_1(x)\, \overline{g_1(x)} + f_2(x)\, \overline{g_2(x)} \right] dx$$

biçiminde verilir.

Soru 1.1

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \text{ ve } f(x) = \begin{pmatrix} e^{-|x|} \\ \frac{e^{-x^2}}{1+|x|} \end{pmatrix}$$

fonksiyonu

a) $L_1(-\infty,\infty;\mathbb{R}^2)$ uzayından mıdır? Neden?

b) $L_2(-\infty,\infty;\mathbb{R}^2)$ uzayından mıdır? Neden?

Çözüm.

a) $f_1(x) = e^{-|x|}$ olmak üzere $f_1 \in L_1(-\infty,\infty)$ gerçeklenir.

$$\frac{e^{-x^2}}{1+|x|} \leq e^{-x^2}$$

olduğundan $f_2 \in L_1(-\infty,\infty)$ olur. Bu nedenle $f \in L_1(-\infty,\infty;\mathbb{R}^2)$ sağlanır.

b) Benzer biçimde $f_1, f_2 \in L_2(-\infty,\infty)$ olur. Yani $f \in L_2(-\infty,\infty;\mathbb{R}^2)$ sağlanır.

Soru 1.2

$$g:[0,\infty)\to\mathbb{R}^2 \text{ ve } g\left(x\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\\ \frac{1}{1+x^2}\end{pmatrix}$$

fonksiyonunun $L_1(0,\infty;\mathbb{R}^2)$ ve $L_2(0,\infty;\mathbb{R}^2)$ uzaylarından olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm. $g_1(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ ve $g_2(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ olmak üzere

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=1,\quad \lim_{x\to\infty} x\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=1$$

olduğundan limit testine göre $g_1 \notin L_1(0,\infty)$ gerçeklenir. Bu nedenle de $g \notin L_1(0,\infty;\mathbb{R}^2)$, $g \notin L_2(0,\infty;\mathbb{R}^2)$ olur.

Alıştırmalar

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ ve $f(x)=\begin{pmatrix}\frac{\cos x}{1+x^2}\\ \frac{x^2}{1+x^4}\end{pmatrix}$ fonksiyonunun $L_1(-\infty,\infty;\mathbb{R}^2)$ ve $L_2(-\infty,\infty;\mathbb{R}^2)$ uzaylarından olup olmadığını araştırınız.

2. $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}^2$ ve $g(x)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{x}}{1+x}\\ e^{-x}\end{pmatrix}$ fonksiyonu

a) $L_1(0,\infty;\mathbb{R}^2)$ uzayından mıdır? Neden?

b) $L_2(0,\infty;\mathbb{R}^2)$ uzayından mıdır? Neden?