KONU 2. VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLAR İÇİN ASİMPTOTİK EŞİTLİKLER

Tanım 2.1. Eğer $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ vektör değerli fonksiyonu sınırlı ise

$$f(x) = O(1),\ x \in [a,b]$$

olarak tanımlanır, yani $\exists M > 0,\ f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ fonksiyonu için

$$|f_1(x) \leq M|\,,\ \ |f_2(x) \leq M|\,,\ x \in [a,b] \Longleftrightarrow f(x) = O(1),\ x \in [a,b]$$

yazılır. Benzer biçimde $g : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ve $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$ fonksiyonu için

$$\left.\begin{array}{lll} f_1(x) = g_1(x) + O(1) & , & x \in [a,b] \\ f_2(x) = g_2(x) + O(1) & , & x \in [a,b] \end{array}\right\} \Leftrightarrow f(x) = g(x) + O(1),\ x \in [a,b]$$

gibi tanımlanır. Örneğin

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = g_1(x) + O(1) & , & x \to 0 \\ f_2(x) = g_2(x) + O(1) & , & x \to 0 \end{array}$$

asimptotik eşitlikleri

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} + O(1),\ x \to 0$$

veya

$$f(x) = g(x) + O(1),\ x \to 0$$

biçiminde yazılır. $o(1)$ asimptotik ifadesi sıfıra yakınsama anlamında olmak üzere

$$\left.\begin{array}{lll} f_1(x) = g_1(x) + o(1) & , & x \to \infty \\ f_2(x) = g_2(x) + o(1) & , & x \to \infty \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} + o(1),\ x \to \infty$$

tanımlanır.

Soru 2.2

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \ln(1+x) \end{pmatrix} = O(x),\ x \to 0$$

asimptotik eşitliğini ispatlayınız.

Çözüm.

$$g_1(x) = \sin x = O(x),\ x \to 0$$

ve

$$g_2(x) = \ln(1+x) = O(x),\ x \to 0$$

asimptotik eşitliklerini gösterelim.

$$\sin x = O(x),\ x \to 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

olduğundan birinci asimptotik eşitlik sağlanır.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

olduğundan ikinci asimptotik eşitlik de gerçeklenir.

Soru 2.3

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ e^x - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} + O(x^2),\ x \to 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 + O(x^2),\ x \to 0 \\ e^x - 1 &= x + O(x^2),\ x \to 0 \end{aligned}$$

olduğunu ispatlayalım.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

ve

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

olduğundan sorudaki eşitlik gerçeklenir.

Alıştırmalar.

1.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1+x} \\ \frac{x}{1+x^2} \end{pmatrix} = O(\frac{1}{x}),\ x \to \infty$$

olduğunu ispatlayınız.

2.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{x}{1+x^3} \end{pmatrix} = O(\frac{1}{x^2}),\ x \to \infty$$

eşitliğini elde ediniz.