KONU 3. DİRAK SİSTEMİ

$$i\frac{du_1(x,\lambda)}{dx}+q_1(x)u_2(x,\lambda)=\lambda u_1(x,\lambda) \tag{3.1}$$

$$-i\frac{du_2(x,\lambda)}{dx}+q_2(x)u_1(x,\lambda)=\lambda u_2(x,\lambda),\ x\in[0,\infty) \tag{3.2}$$

diferensiyel denklemler sisteminden ve

$$u_1(0,\lambda)-u_2(0,\lambda)=0 \tag{3.3}$$

sınır koşulundan oluşan sınır değer problemini göz önünde bulunduralım, burada q_1,q_2 reel değerli fonksiyonlardır ve λ kompleks parametredir. $(3.1)-(3.2)$ sistemi

$$B\frac{d}{dx}u(x,\lambda)+Q(x)u(x,\lambda)=\lambda u(x,\lambda),\ x\in[0,\infty)$$

biçiminde de yazılabilir, burada

$$B=\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix},\ Q(x)=\begin{pmatrix} 0 & q_1(x)\\ q_2(x) & 0\end{pmatrix},u(x,\lambda)=\begin{pmatrix} u_1(x,\lambda)\\ u_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$$

gibi tanımlanır.

Teorem 3.1 $(3.1)-(3.2)$ diferensiyel denklemler sisteminin her bir çözümü

$$u_1(x,\lambda)=u_1(0,\lambda)e^{-i\lambda x}+i\int_0^x e^{-i\lambda(x-t)}q_1(t)u_2(t,\lambda)dt \tag{3.4}$$

$$u_2(x,\lambda)=u_2(0,\lambda)e^{i\lambda x}-i\int_0^x e^{i\lambda(x-t)}q_2(t)u_1(t,\lambda)dt \tag{3.5}$$

$(3.4),(3.5)$ integral denklemler sisteminin de bir çözümüdür. Bunun tersi de doğrudur, yani

$$(3.1),(3.2)\Longleftrightarrow(3.4),(3.5).$$

İspat. Önce $(3.1)\Longrightarrow(3.4)$ olduğunu gösterelim. Bunun için sabitlerin değişimi yöntemini kullanalım. (3.1) in homojen denklemi

$$i\frac{du_1(x,\lambda)}{dx}=\lambda u_1(x,\lambda)$$

biçimindedir. Sonuncu denklemin genel çözümü

$$\widetilde{u}_1(x,\lambda)=c_1e^{-i\lambda x}$$

biçimindedir. (3.1) in çözümünü

$$u_1(x,\lambda)=c_1(x)e^{-i\lambda x}$$

biçiminde arayarak

$$u_1(x,\lambda) = u_1(0,\lambda)e^{-i\lambda x} + i\int\limits_0^x e^{-i\lambda(x-t)} q_1(t)u_2(t,\lambda)dt$$

integral denklemini elde ederiz. Şimdi de (3.4) $\Longrightarrow$ (3.1) olduğunu gösterelim. (3.4) denkleminin x e göre türevini alalım.

$$\begin{aligned}
\frac{du_1(x,\lambda)}{dx} &= -i\lambda u_1(0,\lambda)e^{-i\lambda x} + \lambda\int\limits_0^x e^{-i\lambda(x-t)} q_1(t)u_2(t,\lambda)dt + iq_1(x)u_2(x,\lambda) \\
&= -i\lambda\left[u_1(0,\lambda)e^{-i\lambda x} - i\int\limits_0^x e^{-i\lambda(x-t)} q_1(t)u_2(t,\lambda)dt\right] + iq_1(x)u_2(x,\lambda) \\
&= -i\lambda u_1(x,\lambda) + iq_1(x)u_2(x,\lambda)
\end{aligned}$$

sağlanır, buradan da

$$i\frac{du_1(x,\lambda)}{dx} + q_1(x)u_2(x,\lambda) = \lambda u_1(x,\lambda)$$

olur, yani (3.4) $\Longrightarrow$ (3.1) sağlanır. Benzer biçimde (3.2) $\Longleftrightarrow$ (3.5) olduğu da ispatlanır.

Alıştırma.

1. (3.2) $\Longleftrightarrow$ (3.5) olduğunu ispatlayınız.