KONU 4. DİRAK SİSTEMİNİN JOST ÇÖZÜMLERİ I

A ve B reel sabitler olmak üzere,

$$f(x,\lambda)=\begin{pmatrix} Ae^{-i\lambda x} \\ Be^{i\lambda x} \end{pmatrix}$$

fonksiyonu $(3.1)-(3.2)$ Dirak sisteminin $q_1(x)\equiv q_2(x)\equiv 0$ için çözümüdür.

$$|q_i(x)|\leq \frac{c}{(1+x)^{1+\epsilon}},\ c>0,\ \epsilon>0,\ i=1,2 \tag{4.1}$$

koşulunun gerçeklendiğini varsayalım. $(3.1)-(3.2)$ sisteminin

$$u(x,\lambda)=f(x,\lambda)+o(1),\ x\to\infty$$

veya

$$u(x,\lambda)=\begin{pmatrix} u_1(x,\lambda) \\ u_2(x,\lambda) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Ae^{-i\lambda x} \\ Be^{i\lambda x} \end{pmatrix}+o(1),\ x\to\infty \tag{4.2}$$

koşulunu gerçekleyen çözümünü $u(x,\lambda)$ ile gösterelim.

Teorem 4.1 $(3.1)-(3.2)$ sisteminin (4.2) koşulunu gerçekleyen $u(x,\lambda)$ çözümü

$$u_1(x,\lambda)=Ae^{-i\lambda x}-i\int_x^{\infty}e^{-i\lambda(x-t)}q_1(t)u_2(t,\lambda)dt \tag{4.3}$$

$$u_2(x,\lambda)=Be^{i\lambda x}+i\int_x^{\infty}e^{i\lambda(x-t)}q_2(t)u_1(t,\lambda)dt \tag{4.4}$$

integral denklemler sisteminin de bir çözümüdür.

İspat. $(4.3)\Longrightarrow(3.1)$ olduğunu ispatlayalım.

$$\begin{aligned}\frac{du_1(x,\lambda)}{dx} &= -i\lambda Ae^{-i\lambda x}-\lambda\int_x^{\infty}e^{-i\lambda(x-t)}q_1(t)u_2(t,\lambda)dt+iq_1(x)u_2(x,\lambda)\\ &= -i\lambda\left[Ae^{-i\lambda x}-i\int_x^{\infty}e^{-i\lambda(x-t)}q_1(t)u_2(t,\lambda)dt\right]+iq_1(x)u_2(x,\lambda)\\ &= -i\lambda u_1(x,\lambda)+iq_1(x)u_2(x,\lambda)\end{aligned}$$

olup

$$i\frac{du_1(x,\lambda)}{dx}+q_1(x)u_2(x,\lambda)=\lambda u_1(x,\lambda)$$

bulunur. Bu da teoremi ispatlar.

$(4.3),(4.4)$ sistemini

$$u(x,\lambda)=f(x,\lambda)+\int_x^{\infty}Q(x,t;\lambda)u(t,\lambda)dt \tag{4.5}$$

biçiminde yazabiliriz, burada

$$Q(x,t;\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & , & -iq_1(t)e^{-i\lambda(x-t)} \\ iq_2(t)e^{i\lambda(x-t)} & , & 0 \end{pmatrix}$$

gibi tanımlanır.

$\lambda \in \mathbb{R}$ için (4.5) integral denkleminin çözümü

$$u(x,\lambda)=f(x,\lambda)+\int_x^{\infty} H(x,s)f(s,\lambda)ds \tag{4.6}$$

integral gösterimine sahiptir, burada

$$H(x,s)=\begin{pmatrix} H_{11}(x,s) & , & H_{12}(x,s) \\ H_{21}(x,s) & , & H_{22}(x,s) \end{pmatrix}$$

gibi tanımlanır ve

$$H_{ij}(x,s)\leq \frac{c}{(1+x+s)^{1+\epsilon}},\ c>0,\ \epsilon>0,\ i,j=1,2 \tag{4.7}$$

eşitsizliğini gerçekler. (4.6) ile tanımlanan $u(x,\lambda)$ çözümü yardımı ile (3.1) − (3.2) sisteminin Jost çözümlerinin oluşturacağız.

Alıştırma.

1. (4.4) $\Longrightarrow$ (3.2) olduğunu ispatlayınız.