KONU 5. DİRAK SİSTEMİNİN JOST ÇÖZÜMLERİ II

(4.6) ile tanımlanan $u(x,\lambda)$ çözümünü

$$u_1(x,\lambda) = Ae^{-i\lambda x} + A\int_x^\infty H_{11}(x,s)e^{-i\lambda s}ds + B\int_x^\infty H_{12}(x,s)e^{i\lambda s}ds,\ \ \lambda \in \mathbb{R} \quad (5.1)$$

$$u_2(x,\lambda) = Be^{i\lambda x} + A\int_x^\infty H_{21}(x,s)e^{-i\lambda s}ds + B\int_x^\infty H_{22}(x,s)e^{i\lambda s}ds,\ \ \lambda \in \mathbb{R} \quad (5.2)$$

biçiminde yazabiliriz.

<u>I. durum.</u> $A = 0,\ B = 1$ olmak üzere,

$$u_1(x,\lambda) = E_1^+(x,\lambda),\ \ u_2(x,\lambda) = E_2^+(x,\lambda)$$

ile tanımlansın. Bu durumda $(5.1), (5.2)$ den

$$E^+(x,\lambda) = \begin{pmatrix} E_1^+(x,\lambda) \\ E_2^+(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_x^\infty H_{12}(x,s)e^{i\lambda s}ds \\ e^{i\lambda x} + \displaystyle\int_x^\infty H_{22}(x,s)e^{i\lambda s}ds \end{pmatrix},\ \ \lambda \in \mathbb{R} \quad (5.3)$$

elde edilir.

<u>II. durum.</u> $A = 1,\ B = 0$ olmak üzere,

$$u_1(x,\lambda) = E_1^-(x,\lambda),\ \ u_2(x,\lambda) = E_2^-(x,\lambda)$$

ile tanımlansın. Bu durumda

$$E^-(x,\lambda) = \begin{pmatrix} E_1^-(x,\lambda) \\ E_2^-(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda x} + \displaystyle\int_x^\infty H_{11}(x,s)e^{-i\lambda s}ds \\ \displaystyle\int_x^\infty H_{21}(x,s)e^{-i\lambda s}ds \end{pmatrix},\ \ \lambda \in \mathbb{R} \quad (5.4)$$

olur.

Şimdi $\lambda \in \mathbb{R}$ için $(5.3), (5.4)$ ile tanımlanan $E^+(x,\lambda)$ ve $E^-(x,\lambda)$ çözümlerini sırasıyla

$$\mathbb{C}_+ := \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C},\ \ \operatorname{Im}\lambda > 0\} \ \text{ ve } \ \mathbb{C}_- := \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C},\ \ \operatorname{Im}\lambda < 0\}$$

yarıdüzlemlerine analitik olarak devam ettirelim.

Teorem 5.1 $H_{ij}(x,s),\ i,j = 1,2$ fonksiyonları için $H_{ij}(x,.) \in L_1(0,\infty)$, $H_{ij}(.,s) \in L_1(0,\infty)$, $i,j = 1,2$ olur.

İspat.

$$|H_{ij}(x,s)| \leq \frac{c}{(1+x+s)^{1+\epsilon}},\ \epsilon > 0,\ i,j = 1,2$$

eşitliğini kullanalım.

$$\int_0^\infty |H_{ij}(x,s)|\, ds \leq c\int_0^\infty \frac{1}{(1+x+s)^{1+\epsilon}} ds \leq c\int_0^\infty \frac{1}{(1+s)^{1+\epsilon}} ds < \infty$$

olduğundan $H_{ij}(x,.) \in L_1(0,\infty)$ bulunur.

Teorem 5.2 $\lambda \in \mathbb{R}$ için (5.3) ve (5.4) ile tanımlanan $E^+(x,\lambda)$ ve $E^-(x,\lambda)$ fonksiyonları sırasıyla $\mathbb{C}_+$ ve $\mathbb{C}_-$ yarıdüzlemlerine analitik devama sahiptir.

İspat.

$$E_1^+(x,\lambda) = \int_x^\infty H_{12}(x,s)e^{i\lambda s} ds,\ \lambda \in \mathbb{R} \tag{5.5}$$

olmak üzere

$$\left| \int_x^\infty H_{12}(x,s)e^{i\lambda s} ds \right| \leq \int_x^\infty |H_{12}(x,s)|\, ds < \infty,\ \lambda \in \mathbb{C}_+$$

gerçeklendiğinden (5.5) ile verilen $E_1^+(x,\lambda)$ fonksiyonu λ ya göre $\overline{\mathbb{C}}_+ := \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}\lambda \geq 0\}$ yarıdüzleminde tanımlanır, $\mathbb{C}_+$ da λ ya göre analitik, $\mathbb{R}$ de ise süreklidir. $E_2^+(x,\lambda)$ fonksiyonu için benzer analitik devam gerçeklenir, ayrıca

$$E^+(x,\lambda) = \begin{pmatrix} E_1^+(x,\lambda) \\ E_2^+(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_x^\infty H_{12}(x,s)e^{i\lambda s} ds \\ e^{i\lambda x} + \int_x^\infty H_{22}(x,s)e^{i\lambda s} ds \end{pmatrix},\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \tag{5.6}$$

formülü geçerlidir. Benze biçimde

$$E^-(x,\lambda) = \begin{pmatrix} E_1^-(x,\lambda) \\ E_2^-(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty H_{11}(x,s)e^{-i\lambda s} ds \\ \int_x^\infty H_{21}(x,s)e^{-i\lambda s} ds \end{pmatrix},\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_- \tag{5.7}$$

gibi olur. Ayrıca $E^-(x,\lambda)$ fonksiyonu λ ya göre $\mathbb{C}_-$ de analitik, reel eksende süreklidir.

(5.6) ve (5.7) ile verilen $E^+(x,\lambda)$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$ ve $E^-(x,\lambda)$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_-$ fonksiyonlarına (3.1) – (3.2) Dirak sisteminin Jost çözümleri denir.

Alıştırmalar

1. $H_{ij}(.,s) \in L_1(0,\infty)$ olduğunu gösteriniz.

2. $E^{-}(x,\lambda)$ fonksiyonunun λ ya göre $\mathbb{R}$ den $\mathbb{C}_{-}$ ye analitik devamını göstererek (5.7) formülünü ispatlayınız.