KONU 7. JOST ÇÖZÜMLERİNİN λ DEĞİŞKENİNE GÖRE ASİMPTOTİĞİ

Teorem 7.1

$$E^+(x,\lambda)=\begin{pmatrix} E_1^+(x,\lambda) \\ E_2^+(x,\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}e^{i\lambda x}+o(1),\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}}_+,\ \ |\lambda|\to\infty$$

λ ya göre asimptotik eşitliği sağlanır.

İspat. Önce

$$E_1^+(x,\lambda)=\int\limits_x^\infty H_{12}(x,s)e^{i\lambda s}ds,\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}}_+$$

fonksiyonunun λ ya göre asimptotiğini bulualım.

a) $\lambda\in\mathbb{R}$ olsun.

$$\widetilde{H}_{12}(x,s)=\begin{cases} 0 & ,\quad s\in(-\infty,x) \\ H_{12}(x,s) & ,\quad s\in[x,\infty)\end{cases}$$

olmak üzere $\widetilde{H}_{12}(x,.)\in L_1(-\infty,\infty)$ elde edilir. Fourier dönüşümleri için Riemann-Lebesgue lemmasına göre

$$E_1^+(x,\lambda)=\int\limits_x^\infty H_{12}(x,s)e^{i\lambda s}ds=\int\limits_{-\infty}^\infty \widetilde{H}_{12}(x,s)e^{i\lambda s}ds=o(1),\ \lambda\in\mathbb{R},\ \lambda\to\pm\infty \tag{7.1}$$

bulunur.

b) $\lambda\in\mathbb{C}_+$ olsun.

$$E_1^+(x,\lambda)=\int\limits_x^\infty H_{12}(x,s)e^{i\lambda s}ds,\ \lambda\in\mathbb{C}_+$$

eşitliğindeki integral $\lambda\in\mathbb{C}_+$ için düzgün yakınsak olduğundan, integral içinde limite geçme teoremi gereği

$$E_1^+(x,\lambda)=\int\limits_x^\infty H_{12}(x,s)e^{i\lambda s}ds=o(1),\ \lambda\in\mathbb{C}_+,\ \ |\lambda|\to\infty \tag{7.2}$$

çıkar. (7.1) ve (7.2) eşitliklerinden

$$E_1^+(x,\lambda)=o(1),\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}}_+,\ \ |\lambda|\to\infty \tag{7.3}$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$E_2^+(x,\lambda)=e^{i\lambda x}+\int\limits_x^\infty H_{22}(x,s)e^{i\lambda s}ds=e^{i\lambda x}+o(1),\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}}_+,\ \ |\lambda|\to\infty \tag{7.4}$$

bulunur. (7.3) ve (7.4) asimptotik eşitliklerinden

$$E^+(x,\lambda) = \begin{pmatrix} E_1^+(x,\lambda) \\ E_2^+(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o(1) \\ e^{i\lambda x} + o(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + o(1),\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \to \infty$$

çıkar. Teorem ispatlanır.

Alıştırma.

1.

$$E^-(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} + o(1),\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_-,\ |\lambda| \to \infty$$

asimptotik eşitliğini ispatlayınız.