KONU 10. TÜM REEL EKSENDEKİ DENKLEMİN JOST ÇÖZÜMLERİNİN UZAY DEĞİŞENİNE GÖRE ASİMPTOTİĞİ

(9.1) Sturm-Liouville denkleminin (9.3) ve (9.4) ile tanımlanan $f(x,\lambda)$ ve $g(x,\lambda)$ Jost çözümlerinin x değişkenine göre asimptotiklerini bulalım.

Teorem 10.1 Aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır:
a) $f(x,\lambda) = e^{i\lambda x}[1+o(1)]$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$, $x \to \infty$
b) $f_x(x,\lambda) = e^{i\lambda x}[i\lambda+o(1)]$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$, $x \to \infty$
c) $g(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}[1+o(1)]$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$, $x \to -\infty$
d) $g_x(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}[-i\lambda+o(1)]$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$, $x \to -\infty$

İspat. b) ve c) eşitliklerini gösterelim.
b) (9.3) eşitliğinden

$$f_x(x,\lambda)e^{-i\lambda x} - i\lambda = -A^+(x,x) + \int_x^\infty A_x^+(x,t)e^{i\lambda(t-x)}dt \tag{10.1}$$

bulunur. (9.5) eşitsizliğinden

$$-A^+(x,x) = o(1),\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ x \to \infty \tag{10.2}$$

elde edilir.

$$\left|\int_x^\infty A_x^+(x,t)e^{i\lambda(t-x)}dt\right| \le \int_x^\infty \left|A_x^+(x,t)\right| dt,\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

olduğundan

$$\int_x^\infty A_x^+(x,t)e^{i\lambda(t-x)}dt = o(1),\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ x \to \infty \tag{10.3}$$

bulunur. (10.2) ve (10.3) eşitliklerini (10.1) de dikkate alarak

$$f_x(x,\lambda)e^{-i\lambda x} - i\lambda = o(1),\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ x \to \infty$$

veya

$$f_x(x,\lambda) = e^{i\lambda x}\left[i\lambda + o(1)\right],\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ x \to \infty$$

elde edilir.
c) (9.4) eşitliğinden

$$g(x,\lambda)e^{i\lambda x} - 1 = \int_{-\infty}^x A^-(x,t)e^{i\lambda(x-t)}dt,\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \tag{10.4}$$

bulunur.

$$\left|\int_{-\infty}^x A^-(x,t)e^{i\lambda(x-t)}dt\right| \le \int_{-\infty}^x \left|A^-(x,t)\right| dt,\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

olduğundan

$$\int_{-\infty}^{x} A^{-}(x,t)e^{i\lambda(x-t)}dt = o(1),\ \ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_{+},\ \ x \to -\infty$$

elde edilir. Sonuncu eşitliği (10.4) te dikkate alarak

$$g(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}[1 + o(1)],\ \ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_{+},\ \ x \to -\infty$$

bulunur.

$f(x,-\lambda)$ ve $g(x,-\lambda)$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_{-}$ fonksiyonlarının da (9.1) denkleminin çözümleri olduğu açıktır.

Alıştırmalar.

1) Teorem 10.1 deki a) ve d) eşitliklerini gösteriniz.

2) Aşağıdaki asimptotik eşitlikleri ispatlayınız:
a) $f(x,-\lambda) = e^{-i\lambda x}[1 + o(1)]$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_{-}$, $x \to \infty$
b) $f_x(x,-\lambda) = e^{-i\lambda x}[-i\lambda + o(1)]$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_{-}$, $x \to \infty$
c) $g(x,-\lambda) = e^{i\lambda x}[1 + o(1)]$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_{-}$, $x \to -\infty$
d) $g_x(x,-\lambda) = e^{i\lambda x}[i\lambda + o(1)]$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_{-}$, $x \to -\infty$