İST 304 İstatistik Karar Kuramı ve Yöntemleri **Hafta II**

Ders 1 : Fayda Fonksiyonunun Varlığı

Dersi anlatan: İhsan Karabulut *Notları yazan: İhsan Karabulut*

Not: *LaTeX ders kalıbı UC Berkeley EECS Bölümü'nündür.*

Teorem. P_0 ve P_1, $P_0 \prec P_1$ olan iki seçenek ve P, $P_0 \prec P \prec P_1$ olan bir seçenek ise $0 < p < 1$ olmak üzere P seçeneğine denk olan yegane bir karma $[P_1, P]_p$ seçeneği(yegane bir p) vardır.

Herhangi iki uç seçenek biliyorsa aradaki bütün seçenekler bunların bir karması olarak yazılabilecektir. Hatta bu iki seçenek arasındaki bütün seçenekleri 0 ile 1 arasında sıralanabilir. Kuşkusuz daha tercih edilebilir olan 1 değerine daha yakın değerli olacaktır.

A4 aksiyomunun kullanılması $P_0 \prec P \prec P_1$durumunda $P_0 \prec [P_1, P_0]_r \prec P \prec P_1$ olan birçok $[P_1, P_0]_r$ karma seçeneklerinin varlığının gösterilmesine yetecektir. $[P_1, P_0]_r \prec P$ olan tüm r olasılıklarının kümesi sınırlı bir küme olduğu için pek r sayılarının kümesine pek çok üst sınır vardır dolayısıyla bir en küçük üst sınır vardır bu p ile gösterilsin. Bu en küçük üst sınır aranılan $p = (p,\, 1-p)$ olasılık dağılımını verecektir ki bununla aranılan P sade seçeneği ile aynı tercih edilebilirliğe sahip karma seçeneği yazabilir: $[P_1, P_0]_p \sim P$. Bunun böyle olduğu olmayana ergi yöntemi kullanılarak gösterilecektir. $[P_1, P_0]_p \sim P$ olmadığı; $[P_1, P_0]_p \succ P$ veya $[P_1, P_0]_p \prec P$ olabileceği gösterilmeye çalışılacaktır, bunlar olamaz ise A1 aksiyomu gereğince $[P_1, P_0]_p \sim P$ olduğunu gösterilmiş olacaktır.

$P \succ [P_1, P_0]_p$ olduğu varsayılsın. Bir başka gösterimle $[P_1, P_0]_p \prec P \prec P_1$ olsun. A4 aksiyomu kullanılırsa $[P_1, P_0]_p$ ile P arasında tercih edilebilir ve aşikar olmayan P_1 ile $[P_1, P_0]_p$ nin yer aldığı

$\Big[[P_1, P_0]_p\,, P_1\Big]_s$ gibi bir karma seçenek vardır:

$$[P_1, P_0]_p \prec \Big[[P_1, P_0]_p\,, P_1\Big]_s \prec P.$$

Öte yandan

$$\Big[[P_1, P_0]_p\,, P_1\Big]_s \sim [P_1, P_0]_{ps+1-s}$$

dir. Yukarıdaki ifade

$$[P_1, P_0]_p \prec [P_1, P_0]_{ps+1-s} \prec P$$

olarak yeniden yazılacaktır. $s < 1$ ve $p < 1$ olduğu da göz önünde bulundurulursa

$$ps + 1 - s > p$$

olduğu görülebilir:

$$\begin{aligned} ps + 1 - s - p &= (1-s) - p(1-s) \\ &= (1-s)(1-p) \\ &> 0 \end{aligned}$$

dır. Bu nedenle $[P_1, P_0]_p \prec [P_1, P_0]_{ps+1-s} \prec P$ doğru olamaz, aksiyomların özetlenen (b) sonucu ile çelişir.

İkinci olarak $P \prec [P_1, P_0]_p$ olduğu varsayılsın (yani, $P_0 \prec P \prec [P_1, P_0]_p \prec P_1$ olduğu varsayılsın) A4 aksiyomu kullanılarak P ile $[P_1, P_0]_p$ arasında $[P_1, P_0]_p$ ve P_0 ile oluşturulan bir $\Big[[P_1, P_0]_p\,, P_0\Big]_t$ karma seçeneği bulunabilecektir. Açık olarak $P \prec \Big[[P_1, P_0]_p\,, P_0\Big]_t \prec [P_1, P_0]_p$ olan bir karma seçenek bulunacaktır. $\Big[[P_1, P_0]_p\,, P_0\Big]_t = [P_1, P_0]_{pt}$ olduğu ilk adımda gösterildiği gibi görülebilir. Bu nedenle bu varsayımla $P \prec [P_1, P_0]_{pt} \prec [P_1, P_0]_p$sonucuna ulaşılır. $pt < p$ olduğu $p < 1, t < 1$

olduğundan doğrudur, o halde $p$bir supremum değildir, pt de bir üst sınırdır ve p den küçük bir üst sınırdır. p, $P \sim [P_1, P_0]_p$nin tanımlanabileceği tek olasılık dağılımını belirler.

Bu sonuç verilen iki seçenek ile arasındaki bütün ara seçeneklerin $[0, 1]$ aralığında tercihlerin bir göstergesi olarak kodlanabileceğini ve bir fayda fonksiyonunu belirlerken nasıl bir yol izlenebileceğini gösteriyor. Verilen P_0, P_1 seçeneklerinden P_1 bütün seçeneklere tercih edilen P_0 ise hiçbir seçeneğe tercih edilmeyen olduklarında herhangi bir seçenek $P \sim [P_1, P_0]_p$ olmak üzere

$$U(P) = U\left([P_1, P_0]_p\right) = p$$

$U(P_0) = 0$, $U(P_1) = 1$ tanımlanabilir.

Örnek. Yemekte üç değişik et seçeneği olsun. Bir bireyin bu seçeneklere ilişkin tercih yapısı (bu aşamada sıralama demek yanlış anlaşılmayacaktır) balık $\prec$ tavuk $\prec$ dana eti'dir. Birey geçmişteki deneyimlerinden 1/4 olasılıkla dana eti ve 3/4 olası- lıkla balık seçimini yaptığı karma(rasgele) seçeneğinin sade seçeneği tavuk ile aynı tercih edilebilirliğe sahip olduğunu bilmekte olsun. $U(\text{balık}) = 0$, $U(\text{dana eti}) = 1$ ise

$$U(\text{tavuk}) = U\left([\text{dana eti, balık}]_{\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{4}$$

olduğu bulunacaktır.

İST 304 İstatistik Karar Kuramı ve Yöntemleri **Hafta II**

Ders 2 : Fayda Fonksiyonunun Özellikleri ve Genişletilmesi I

Dersi anlatan: İhsan Karabulut *Notları yazan: İhsan Karabulut*

Fayda Fonksiyonu ve Özellikleri :

Herhangi bir seçenek $P \sim [P_1, P_0]_p$ için tanımlanmış bir fayda fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

Özellik A: $P \succ Q$ ise $U(P) > U(Q)$ dır.

Özellik B: $U([P, Q]_r) = rU(P) + (1-r)U(Q)$ dır.

Özellik A şöyle elde edilebilir: P, Q seçenekleri (aynı tercih edilebilirliği eşitlik olarak göstereceğiz) $P = [P_1, P_0]_p$ ve $Q = [P_1, P_0]_q$ olsun. $P \succ Q$ olduğundan $p > q$ olacaktır. Diğer taraftan $U(P) = p$ ve $U(Q) = q$ olacaklarından $U(P) > U(Q)$ olacaktır.

Özellik B yi elde etmek için P, Q seçenekleriyle oluşturulan karma:

$$[P, Q]_r \sim \Big[[P_1, P_0]_p, [P_1, P_0]_q\Big]_r \sim [P_1, P_0]_{pr+q(1-r)}$$

dır. Böyle bir seçeneğin fayda fonksiyonu değeri

$$\begin{aligned} U([P, Q]_r) &= pr + q(1-r) \\ &= rU(P) + (1-r)U(Q) \end{aligned}$$

olarak bulunmuş olur.

Özellik B'nin bir değerlendirmesi **beklenen değer** anlamında yapılabilir, ancak bu değer bir karma seçeneğin fayda fonksiyonu değeridir. Bir karma (rasgeleleştirilmiş) seçeneğin faydası $U(P)$ ve $U(Q)$ gibi iki değeri sırasıyla r ve $(1-r)$ olasılıklarla alan bir rasgele değişkenin beklenen değridir;

$U\left([P,Q]_r\right)$ fayda değeri, $[P,Q]_r$ seçeneğinin beklenen değeridir.

P_1 ve P_0 arasındaki her bir seçeneğin faydası yegane olarak belirlenmiş olmakla beraber faydanın herhangi bir lineer fonksiyonu (doğrusal fonksiyonu) da A ve B özelliklerine sahip olacaklardır. Bu fonksiyon da fayda fonksiyonunun sahip olduğu aynı işleve sahip olacaktır. örneğin P_1 ve P_0 arasındaki her bir P seçeneğinin faydası $V(P)$ fayda fonksiyonu $a > 0$ ve b sabitler olmak üzere

$$V(P) = aU(P) + b$$

Bu tanımlama bir orijin kaydırma ve ölçekleme içermektedir. $V(P_0) = b$, $V(P_1) = a + b$. A ve B özelliklerinin sağlandığını göstermek kolaydır.

Örnek(Önceki örnekten devam)**.** Birey tavuk, balık ve dana eti seçeneklerinin faydalarının $V\left(\text{tavuk}\right) = 2, V\left(\text{dana eti}\right) = 5, V\left(\text{balık}\right) = 1$ olduğunu ifade etmiştir. Birey için hangi olasılık dağılımı ile bir dana eti ve balık karma seçeneği oluşturulursa bu karma seçenek ile tavuk seçeneğinin faydaları aynı olur?

Bir fayda fonksiyonunun sahip olduğu özelliklerden ikincisi kullanılırsa

$$V\left([\text{ dana eti,balık}]_p\right) = pV\left(\text{ dana eti}\right) + (1-p)\,V\left(\text{balık}\right) = 2$$

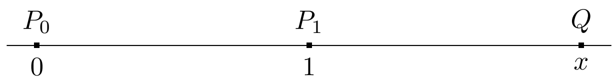
olması gerektiği görülecektir. Yani,

$$V\left([\text{dana eti, balık}]_p\right) = 5p + (1-p) = 4p + 1 = 2$$

eşitliği ancak $p = 1/4$ olduğunda $p = (1/4, 3/4)$ olasılık dağılımlı karma oluşturulursa aynı fayda sağlanır.

Bu problemin çözümlemesinde yer alan $V\left([\text{dana eti,balık}]_p\right) = 4p + 1$ eşitliğinde $p$nin yerini $U([\text{ dana eti, balık}]_p) = p$ alabileceği gözlemlenirse herhangi bir P seçeneği için $V(P) = 4U\left(P\right) + 1$ olup U fayda fonksiyonunun bir doğrusal dönüşümü olduğu görülür.

Şimdi de verilen P_0 ve P_1 ve bunların aralarında yer alanlar dışındaki seçenekler için fayda fonksiyon değerlerini belirleme konusu üzerinde durulacaktır. Fayda fonksiyonunun P_0 ve P_1 seçeneklerinden bağımsız olarak da belirlenebileceğini görülecektir.



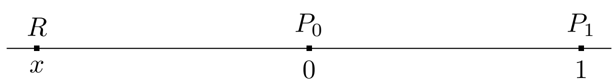
Şekil 2.1: Q seçeneği P_1' e tercih edilebilir olduğunda fayda değeri.

Diyelim ki Q, P_1 e tercih edilen bir seçenektir, $P_0 \prec P_1 \prec Q$ ve özellik A'nın sağlanacağı şekilde fayda fonksiyonu değeri x'e sahip olduğunu varsayılsın. şimdi Q için fayda fonksiyonu tanımlamasını özellik B nin de sağlanacağı şekilde yapmak için bilindiği gibi P_0 ile Q nun bir karması bulunabilir ki bu P_1 seçeneğine denktir:$P_1 \sim [Q, P_0]_y$. Özellik B

$$U(P_1) = 1 = yU(Q) + (1 - y)U(P_0) = yx$$

olmasını gerektirecektir.

Böylece $U(Q) = x = 1/y$ olacağı bulunur. Benzer olarak P_0 seçeneği bir R seçeneğine tercih edilebilir olsun:



Şekil 2.2: R seçeneği P_0' a tercih edilemez olduğunda fayda değeri.

$U(R) = x$ olarak tanımlayalım. $P_0 \sim [P_1, R]_z$ olacak bir $z = (z, 1 - z)$ olasılık dağılımı bulunabileceğinden ve özellik B nin sağlanmasının gereği olarak

$$\begin{aligned} U(P_0) &= 0 = zU(P_1) + (1 - z)U(R) \\ &= z + (1 - z)x \end{aligned}$$

olacak ve $x = -z/(1-z)$ bulunacaktır. Burada hem $U(Q)$ hem de $U(R)$ gibi, seçeneklerin faydalarının **sonlu oldukları** varsayılacaktır. Bu **genişletilmiş** fayda fonksiyonunun A ve B özelliklerini sağladığı görülebilir.

Bunu göstermek için kullanılacak **herhangi** iki seçenek P, Q olsun. Ayrıca P_0 P_1, P, Q seçenekleri içinde diğer üç tanesine tercih edileni P_1^*, diğer üç tanesinin tercih edildiği seçenek P_0^*olsun. U fayda fonksiyonu verilen P_0, P_1 anlamında tanımlanmış olsa da P_0^*, P_1^*dan başlayarak tanımlanabilirdi. Böyle olsaydı kuşkusuz ki tanımlanan fayda fonksiyonu U^* P_o^*, P_1^*ve bunların arasında yer alacak bütün seçenekler için A, B özelliklerini sağlayacaktı. Bunlar arasında yer alacak bir ara seçenek $R \succ P_1$ olan herhangi bir R seçeneği olsun. O halde yeni tanımladığımız U^* genişletilmiş fayda fonksiyonu kullanılarak ve $P_1 = [R, P_0]_r = [R, P_0]_{1/U(R)}$ olacaktır. Bu biraz önceki değerlendirmelerde yapılan gözlemlerin sonucudur . Çünkü, orda benzer durumda

$x = U(R) = 1/y$ bulunmuştu. Burada $y = r = 1/U(R)$ olarak bulunmuş olmalıdır. P_1 seçeneğine ilişkin genişletilmiş fayda fonksiyonu değeri

$$U^*\left(P_1\right) = \frac{1}{U(R)} U^*(R) + \left(1 - \frac{1}{U(R)}\right) U^*(P_0)$$

elde edilir. $U^*(R)$ değerini eşitlikten çekilirse:

$$U^*(R) = \left[U^*(P_1) - U^*(P_0)\right] U(R) + U^*(P_0)$$

olur. Eğer R seçeneği yine P_o^*, P_1^* arasında yer alan P_0 seçeneğine tercih edilen bir seçenek ise yukarıdaki gözlemler kullanılarak

$$P_0 = [P_1, R]_t = [P_1, R]_{\frac{U(R)}{U(R)-1}}$$

olacaktır. P_0 seçeneğinin genişletilmiş fayda fonksiyonu değeri

$$U^*(P_0) = \frac{U(R)}{U(R)-1}U^*(P_1) + \frac{(-1)}{U(R)-1}U^*(R)$$

olarak yazılabilecek ve bu eşitlikten

$$U^*(R) = [U^*(P_1) - U^*(P_0)]\, U(R) + U^*(P_0)$$

olarak çekilmiş olacaktır. Her iki halde de, $R \succ P_1, R \prec P_0$ olduklarında $U^*(R)$'nin aynı olduğu görülecektir. Bu durumda $U(R)$, $U^*(P_0), U^*(P_1)$ birer sabit olduklarından

$$U(R) = \alpha U^*(R) + \beta$$

yazılacaktır. U^*, A ve B özelliklerini sağlar. Dahası $R = [P_1, P_0]_r$ tanımlanmışken $P_0 \preceq R \preceq P_1$ ise

$$\begin{aligned} U^*(R) &= rU^*(P_1) + (1-r)U^*(P_0) \\ &= r\,[U^*(P_1) - U^*(P_0)] + U^*(P_0) \\ &= U(R)\,[U^*(P_1) - U^*(P_0)] + U^*(P_0) \end{aligned}$$

$U^*(R)$ ve $U(R)$ arasında yine aynı doğrusal bağıntı vardır. Durum bu olunca P_o^*, P_1^* arasında yer alan herhangi iki seçenek P, Q için

$$\begin{aligned} U([P,Q]_x) &= \alpha U^*([P,Q]_x) + \beta \\ &= \alpha\,[xU^*(P) + (1-x)U^*(Q)] + \beta x + \beta(1-x) \\ &= xU(P) + (1-x)U(Q) \end{aligned}$$

bulunur ki bu U nun genişletilmesi halinde özellik B nin yine sağlandığını gösterir. Eğer $P \prec Q$ varsayılırsa

$$U(P) = \alpha U^*(P) + \beta < \alpha U^*(Q) + \beta = U(Q)$$

olduğunun gözlenmesi de özellik A nın sağlanacağını gösterir.

Kaynaklar

[1] H. Chernoff and L. E. Moses (1986), *Dover Publications*, New York.

[2] B. W. Lindgren (1971), Elements of Decision Theory, *Macmillan Company*, New York.