

KONU 12. SAÇILIM MATRİSİ

Teorem 12.1. $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$\begin{aligned} W[f(x, \lambda), f(x, -\lambda)] &= -2i\lambda \\ W[g(x, \lambda), g(x, -\lambda)] &= 2i\lambda \end{aligned}$$

eşitlikleri gerçekleşir.

İspat. $f(x, \lambda)$ ve $f(x, -\lambda)$ çözümlerinin x değişkenine göre asimptotik eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} W[f(x, \lambda), f(x, -\lambda)] &= f(x, \lambda)f_x(x, -\lambda) - f_x(x, \lambda)f(x, -\lambda) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \{ [f(x, \lambda)e^{-i\lambda x}] [f(x, -\lambda)e^{i\lambda x}] - [f_x(x, \lambda)e^{-i\lambda x}] [f(x, -\lambda)e^{i\lambda x}] \} \\ &= -i\lambda - i\lambda \\ &= -2i\lambda \end{aligned}$$

bulunur. Benzer biçimde ikinci eşitlik de ispatlanır.

Sonuç 12.2 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $\{f(x, \lambda), f(x, -\lambda)\}$ ve $\{g(x, \lambda), g(x, -\lambda)\}$ çözümleri (9.1) denkleminin temel çözümler sistemini oluşturur.

$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$f(x, \lambda) = b(\lambda)g(x, \lambda) + a(\lambda)g(x, -\lambda) \quad (12.1)$$

$$g(x, \lambda) = c(\lambda)f(x, \lambda) + d(\lambda)f(x, -\lambda) \quad (12.2)$$

açılımlarını yazalım.

Teorem 12.3 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= -\frac{1}{2i\lambda} W[f(x, \lambda), g(x, \lambda)], \quad b(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda} W[f(x, \lambda), g(x, -\lambda)] \\ d(\lambda) &= a(\lambda) \text{ ve } c(\lambda) = -b(-\lambda) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (12.1) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned} W[f(x, \lambda), g(x, \lambda)] &= W[b(\lambda)g(x, \lambda) + a(\lambda)g(x, -\lambda), g(x, \lambda)] \\ &= b(\lambda)W[g(x, \lambda), g(x, \lambda)] + a(\lambda)W[g(x, -\lambda), g(x, \lambda)] \\ &= -2i\lambda a(\lambda) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$a(\lambda) = -\frac{1}{2i\lambda} W[f(x, \lambda), g(x, \lambda)], \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

çıkar. Benzer biçimde

$$W[f(x, \lambda), g(x, -\lambda)] = 2i\lambda b(\lambda)$$

ve

$$b(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda} W[f(x, \lambda), g(x, -\lambda)], \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

bulunur. (12.2) eşitliğini kullanarak

$$d(\lambda) = -\frac{1}{2i\lambda} W[f(x, \lambda), g(x, \lambda)] = a(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ve

$$c(\lambda) = -b(-\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

eşitlikleri bulunur.

$$S(\lambda) = \begin{bmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{bmatrix}$$

matrisine (9.1) denkleminin saçılım matrisi denir.

Alıştırma.

1) $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$f(x, -\lambda) = \overline{f(x, \lambda)}, \quad f_x(x, -\lambda) = \overline{f_x(x, \lambda)}$$

ve

$$g(x, -\lambda) = \overline{g(x, \lambda)}, \quad g_x(x, -\lambda) = \overline{g_x(x, \lambda)}$$

olduğunu ispatlayınız.