İST 304 İstatistik Karar Kuramı ve Yöntemleri **Hafta V**

Ders 1 : Konveks Kümeler I

Dersi anlatan: İhsan Karabulut *Notları yazan: İhsan Karabulut*

Not: *LaTeX ders kalıbı UC Berkeley EECS Bölümü'nündür.*

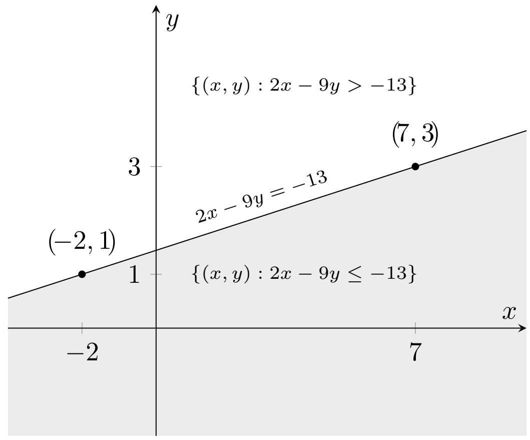
Uyarı: *Bu ders notları formal yayınların tabi olduğu kanun, yönetmelik, kural ve esaslar dışındadır. Ders dışında herhangi bir şekilde kopya edilmesi, çoğaltılması, yayımlanması yalnızca bu notları hazırlayan ve yazanın iznini gerektirir.*

Hiperdüzlemler (hyperplanes) ve genel olarak da konveks kümeler R^n'de tanımlan- mış *karar verme problemlerinde* çözümlerin varlığının öngörülebilmesinde önemli bir yere sahiptir. Bu derste sunulacak karar verme problemleri çoğunlukla görsel çözümlemenin yapılacağı R^2'de ele alıncaktır. Bu nedenle konveksliğin karar verme problemlerinin çözümlenmesindeki önemli yeri daha açık olacaktır. Aşağıdaki bilgiler çoğunlukla Neil Cameron, H. Chernoff ve L.E.Moses, H.W.Khun ile D.Blackwell ve M.A.Girshick temel alınarak verilmiştir.

R^n reel sayılardan oluşmuş x gibi sıralı n-lilerin (n boyutlu vektörlerin) uzayını göstersin. x'in i. bileşeni x_i ile gösterilsin. Aynı n boyutlu herhangi iki elemanı x ve y için tanımlı iç çarpım $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ ile ve x'in uzunluğu negatif olmayan $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ ile tanımlansın. R^n'deki elemanlarla toplama, bu elemanlarla bir sabitin çarpımının ve elamanları arasında iç çarpımının tanımlı olduğu vektörler uzayına Öklid(Euclidean) uzayı denilir. Bu uzayda birbirinden lineer bağımsız n tane vektör varken $n + 1$ tane vektörün yer aldığı her vektör kümesi lineer bağımlıdır.

Tanım. $a \in R^n$ tüm bileşenleri 0 olmayan verilmiş bir vektör ve $b \in R$ bir sabit olmak üzere $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ eşitliği ile tanımlı $x \in R^n$ vektörlerinin $\{x : \langle a, x\rangle = b\}$ kümesi R^n bir hiperdüzlemdir.

R^n'deki gibi $(0, 0, \ldots, 0\ )$ olan doğal bir orijinin var olmaması dışında R^n'deki her hiperdüzlem



Şekil 1.1: R^2'de $2x - 9y = -13$ doğrusu ve $\{(x,y) : 2x - 9y \leq -13\}$ kümesiyle tanımlı kapalı yarı-uzayı.

R^{n-1}'de bir Öklid uzayıdır. Örneğin, R^2'de bu hiperdüzlem bir doğru, R^3'de hiperdüzlem bir düzlem olur ve bu kümeler de birer Öklid uzayıdırlar. R^n'de bir hiperdüzlem bu uzayı iki yarı-uzaya ayırır.

Tanım. $a \in R^n$ tüm bileşenleri 0 olmayan verilmiş bir vektör ve $b \in R$ bir sabit olmak üzere $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b$ eşitliği ile tanımlı $x \in R^n$ vektörlerinin $\{x : \langle a, x\rangle \leq b\}$ kümesi R^n'de kapalı bir yarı- uzaydır.

Kapalı yarı-uzayın sınır noktalarının kümesinin (boundary) hiperdüzlemdir.

Örnek. R^2'de $a = (a_1, a_2)'$ olarak verilmiş vektör (bileşenleri sabit) ve sabit $c \in R$ için $a_1x_1 + a_1x_1 = c$ bir doğru ve $\{x : a_1x_1 + a_2x_2 \leq c\}$ kümesi bu doğrunun üzerinde ve altında bulunan $x = (x_1, x_2)$ noktalarının (vektörlerin) oluşturduğu kapalı yarı-düzlemi oluşturur. Aşağıdaki şekilde R^2'de $(-2, 1)$ ve $(7, 3)$ noktalarından geçen $y = (2/9) + (13/9)x$ veya diğer gösterimle $2x - 9y = -13$ doğrusu ve $\{(x, y) : 2x - 9y \leq -13\}$ kümesiyle tanımlanan taralı yarı-uzay gösterilmektedir. $\{(x, y) : 2x - 9y \leq -13\}$ kapalı yarı-uzayının tümleyeni de $\{(x, y) : 2x - 9y > -13\}$ yarı-uzayıdır doğrunun üstünde kalan vektörleri içerir.

Ders kapsamında R^n' de gereksinim duyulacak kümelerden biri de *konveks kümeler* dir. Konveks kümeler kavramı kaynağını uzayda $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m$ konumlarında yer alan ve sırasıyla $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$ kütlelerine sahip m tane gök cisminin çekim merkezinin bulunması probleminden alır. Problemin çözümü çekim merkezi x ile gösterilmek üzere

$$x = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m}{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}$$

dir ve konumlar reel sayılarken x'in bir ağırlıklı aritmetik ortalama; konumlar vektörel ifade edildiğinde de x'in her bileşeni yine birer ağırlıklı aritmetik ortalama olduğu bir vektör olacaktır. a_i kütle değerlerinin negatif olmadığı göz önüne alınıp $\lambda_i = a_i / \sum_{i=1}^m a_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ olarak gösterilmek üzere, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ olacaktır. x çekim merkezi λ_i gösterimi kullanılarak

$$x = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \cdots + \lambda_mx_m$$

yazılabilir.

Tanım. C, R^n'nin bir alt kümesi ve $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m$, C kümesinde yer alan herhangi m tane nokta olsun. $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$ ve $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ olan herhangi reel sayıları için $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in C$ oluyorsa C kümesi konveks küme ve x vektörü $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m$'nin bir konveks kombinasyonu olarak adlandırılır.

Tanımda $m = 2$ olarak yer alabilir ve bu şekilde yapılacak tanımlamanın yukarıda verilen tanımlamaya denk olduğu gösterilebilir. Bunun için C'deki $m - 1$ tane vektörün bütün konveks kombinasyonlarının yine C'de olduğu gösterilmiş olduğu varsayılsın. $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$, $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m \in C$ noktalarının bir konveks kombinasyonu olsun. $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ olduğundan ve λ_i'lerden en az birinin örneğin $\lambda_1 \neq 0$ olduğunu varsaymak genellikten birşey kaybettirmez. Aşağıdaki

$$\lambda_i^* = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i}, i = 1, 2, \cdots, m - 1$$

tanımlamasıyla

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i x_i + \lambda_m x_m \\ &= (\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i)(\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i^* x_i) + \lambda_m x_m \end{aligned}$$

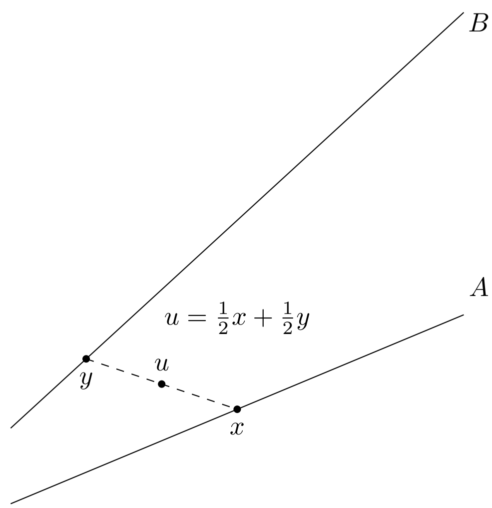
Son eşitlik bir önceki eşitliğin sağındaki ilk ifadenin $\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i$ ile çarpılıp bölünmesi ile elde edilmiştir. Son eşitlik C'deki iki noktanın konveks kombinasyonundan başka birşey değildir: $\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \geq 0$, $\lambda_m \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i + \lambda_m = 1$ ve $\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i^* x_i \in C$, $x_m \in C$ dir. O halde C'deki herhangi iki noktanın, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olan reel sayıları için konveks kombinasyonları yine C'de ise C konveks bir kümedir.

R^2'de sınırlı konveks bir kümenin geometrik olarak değerlendirilmesi kabaca şöyle yapılabilir: Sınırlı konveks bir kümenin Küme içinde yer alan tüm noktaları birbirine bağlayan doğru parçaları yine bu kümenin kendisine aittir.

R^2'de doğru ve doğru parçaları, yarı-düzlemler, daire, üçgensel bölgeler konveks kümelere örnek verilebilir. Bir dairenin tümleyeni, çember ve üçgen (iç bölgesi olmayan) konveks olmayan kümelere örnektirler. R^n'de yar-uzaylar ve hiperdüzlemler, $\{x \in R^n : x_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, n\}$ genelleştirilmiş ilk dördül (first orthant) konveks kümelerdir. Konveks kümelere ilişkin olarak aşağıdaki sonuçları hatırlamak faydalı olacaktır:

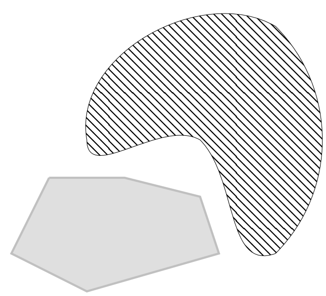
Konveks kümelerin birleşimlerinin her zaman konveks olması gerekmez. Örneğin, R^2'de birbirine paralel olmayan iki doğru kümesi A ve B olsun. $x \in A$, $y \in B$ ve $x \neq y$ olan x, y noktaları için $\lambda_1 = \lambda_1 = 1/2$ seçilmiş olsun(başka λ_1, λ_1 de seçilebilirdi). $x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \notin A \cup B$ olacaktır.

Diğer sonuç ise konveks kümelerin kesişimlerinin daima konveks küme olduğudur. R^n'de C ile gösterilen konveks kümelerin herhangi bir ailesi(sonlu sayıda ya da sayılamaz sonsuzlukta konveks küme içeren küme) F ile gösterilmek üzere kesişimleri kümesi $\cap\{C : C \in F\}$ konvekstir.(Not:Boş



Şekil 1.2: İki konveks kümenin birleşimi konveks olmayabilir. $A \cup B$ kümesi konveks küme değildir.

küme $\emptyset$ konveks bir kümedir).



Şekil 1.3: Kümelerin her ikisi konveks olmadıkça ortak noktaları olmasalar da ayırt edilemezler.

Üzerinde çalışılan küme konveks olmasa da bu kümeyi kapsayan en dar bir konveks küme bulunabilir. Karar verme problemlerinde de başlangıçta konu olan kümeler seçeneklere ilişkin kayıp kayıp vektörlerinin kümeleridir ve bu noktalar kümesi konveks değildir. Bu noktaları içeren konveks küme bulunabilir. Karar verme problemlerinin matematiksel olarak çözümlenmesinin de ötesinde daha az kayıpların yaşanabileceği seçenekler oluşturulur.

İST 304 İstatistik Karar Kuramı ve Yöntemleri **Hafta V**

Ders 2 : Konveks Kümeler II

Dersi anlatan: İhsan Karabulut *Notları yazan: İhsan Karabulut*

Tanım. S, R^n'de herhangi bir küme ve F R^n' de S kümesini içeren tüm C konveks kümelerin kümesi (sınıfı) olmak üzere

$$C(S) = \cap\{C : C \in F, S \subset C\}$$

kümesine S *kümesinin konveks hull*u denir.

Konveks hull yerine konveks kabuk, konveks örten veya konveks çekirdek de denilebilir. Tanımda F sınıfında sayılabilir ya da sayılamaz sonsuzlukta konveks küme bulunabilecektir. Önceki bilgilerin sonucu olarak konveks kümelerin kesişimlerinin bir konveks küme olması nedeniyle tanımdaki $C(S)$ kümesinin konveks olduğu anlaşı- lacaktır. S konveks bir küme olmasa da $C(S)$, S'yi içeren en küçük konveks kümedir.

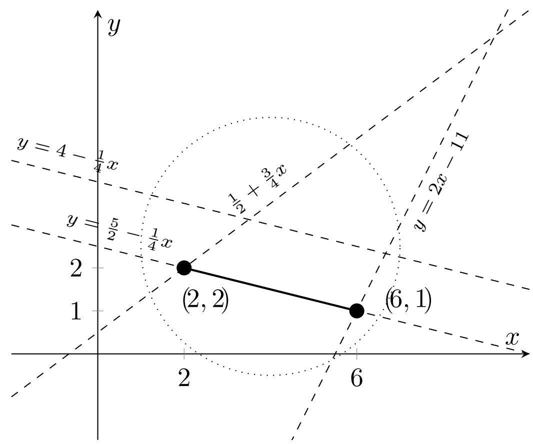
Örnek. $S \subset R^2$ olan $S = \{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ kümesi sadece iki noktayı içeren ve her $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olan reel sayıları için $x = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ olan hiçbir noktayı içermez, konveks değildir. İki nokta ile birlikte bu noktaların olası bütün

$$x = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

noktalarını da içeren bir küme doğrular başlığı altında da görüldüğü gibi

$$\{x : x = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1], \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$$

dir; bu iki noktayı içeren konveks kabuk doğru parçasıdır. Bu iki noktayı içeren konveks kümeyi elde edebilmenin diğer yolu da tanımın uygulanmasıdır. Tanımda yer alan bu noktaların içerildiği



Şekil 2.4: Kesikli çizgilerle belirlenen doğrular ve pek çok benzerlerinin $(2,2),(6,1)$ noktalarını içine alacakları yarı-uzaylar ve yine bu noktaları içerecek her konveks bölgenin kesişimleriyle yukarıdaki çizimde yer alan $(2,2)$ ve $(6,1)$ uç noktalarına sahip doğru parçası-verilen iki noktayı içeren konveks kabuk- elde edilir.

konveks kümeler sayılamaz sonsuzluktadır ve bir listesi pratik olarak yapılamaz. Biraz sezgisel de olsa düşük boyutlarda konveks kabuk uygun seçilmiş birkaç konveks kümenin kesişimi ile ortaya çıkarılabilir.

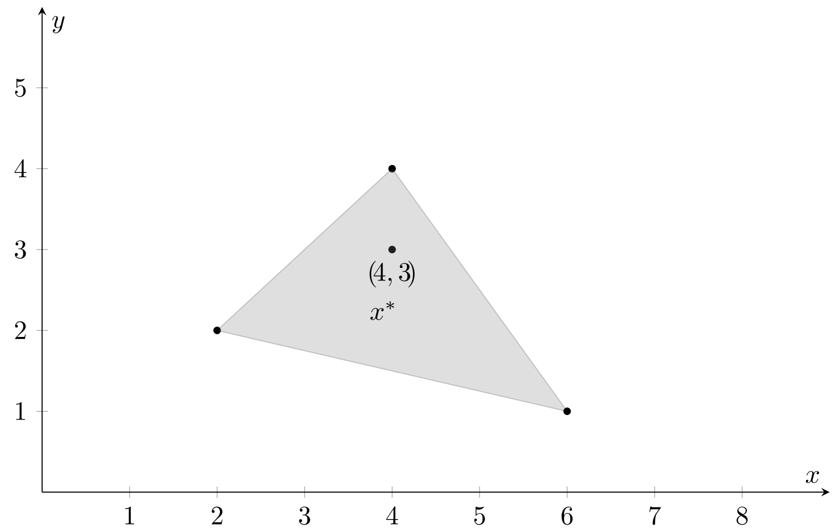
R^2'de verilen sonlu sayıdaki noktaları içeren konveks kabuk elde etmenin daha basit yolu bir örnekle aşağıda gösterilecektir. İlerideki konu anlatım ve karar verme problemlerinde de benzer konveks kabuklar elde edilecektir.

Örnek. $S \subset R^2$ olan $S = \{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\}$ kümesinin tüm konveks kombinasyonları, doğru parçasının üzerinde yer alan noktaların kümesinin elde edil- mesine benzer şekilde

$$\{x : x = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1, \lambda_i \in [0,1]\}$$

bütün konveks kombinasyonların bulunduğu küme olarak yazılabilir.

Konveks kabuk oluşturulurken verilen dört nokta R^2 düzleminde konumlandırıldı. Bu noktaların tümünü içeren girintileri olmayan çokgenin (burada bir üçgen) bu noktaları içeren en küçük konveks



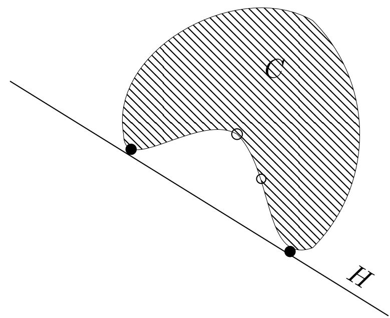
Şekil 2.5: Verilen 4 noktanın konveks kombinasyonlarının kümesi. 4 noktayla oluşturulan konveks kabuk. $(4, 3)$ noktası konveks kabuğun içinde kaldı. En dar konveks küme bu örnek için bir üçgensel bölge oluşturdu.

küme olduğu görülmüş oldu. Bu küme içinde alınacak herhangi iki (ya da daha çok sayıda) noktanın konveks kombinasyonu bu küme içinde yer alacaktır. Örneğin $(3, 2.5), (4.5, 3)$ konveks kabuğun elamanlarıdır. $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olan $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ için $x^* = \lambda_1(3, 2.5) + \lambda_2(4.5, 3)$ konveks kabukta yer alır. $\lambda_1 = 0.4, \lambda_1 = 0.6$ için $(39/10, 19/10)$ çizimde x^* olarak işaretlenmiştir.

Konveks kümeler karar, oyun ve en iyileme (optimizasyon) problemlerinin çözüm- lenmesinde önemli işlevleri vardır. Konveks kümelerle ilgili bazı önemli sonuçlar verilecektir, ispatları ders kapsamının dışında ve amaçların ötesindedir. Bununla birlikte ilgilenenler için Blackwell ve Girshick (1979, ss. 30-41), Çınlar ve Vanderbei (2013, ss. 85-92) kaynak gösterilebilir.

Teorem. En az birinin sınırlı olduğu ve ortak noktaları olmayan C_1 ve C_2 kapalı konveks kümeleri için $x \in C_1$ olduğunda $ax > c$ ve $x \in C_2$ olduğunda $ax < c$ olan bir $ax = c$ hiperdüzlemi vardır.

Not: Konveks kümeler kapalı olduklarından sınır noktaları da bu kümelere aittir. Kapalı yarı-uzay tanımı sonrası yapılan açıklamada olduğu gibi R^n'de kapalı bir $\{x : ax \leq b\}$yarı-uzayının sınır noktalarını kümesi $\{x : ax = b\}$ hiperdüzlemidir.



Şekil 2.6: C gibi kapalı ve konveks olmayan bir kümenin her noktasından H gibi bir düzlem

Bu teoremin uygulamaya dönük bazı sonuçları vardır. Bunlar aşağıda verilmiştir.

Sonuç1. y, C_2'nin bir sınır noktası olmak üzere $x \in C_2$ için $ax \leq c$ olan ve y noktasını da içeren bir $\{x : ax = c\}$ hiperdüzlemi vardır.

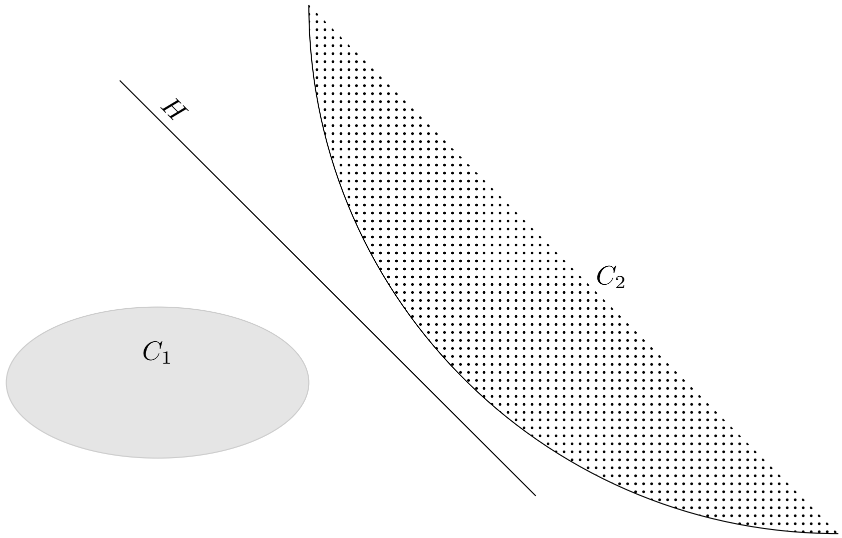
Bu sonuçta sözü edilen $\{x : ax = c\}$ hiperdüzlemine *y noktasında destekleyici hiperdüzlem* denilir. Hiperdüzlem için $ay = c$ ve hiperdüzlemin belirlediği yarı-uzay için $C_2 \subset x : ax \leq c$ olduğu ifade edilmektedir. Bu sonucun bir anlatımı ŞekilA'da verilmiştir.

Sonuç 2. Ortak noktaları olmayanC_1 ve C_2 konveks kümelerini *ayırt edici bir hiperdüzlem* vardır.

Sonuç 1 aşağıdaki önemli teoremi ispatlamakta bir araç olarak kullanılır. Aşağıdaki teoremde ekstrem nokta köşe anlamındadır. Konveks bir küme olarak üçgensel bölgenin köşeleri buna örnek verilebilir. Eğer C konveks kümesinin bir y noktası C içindeki herhangi bir doğru parçası üzerinde yer almıyorsa bu noktaya bu kümenin bir ekstrem (köşe) noktası denilir. Bu şu anlama gelir: köşe noktaları aşikar konveks kombinasyonun dışında yazılamayan konveks küme elemanlarıdır. $y \in C$ ise $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ için $y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ olacak şekilde $x_1 \neq x_2$ olup $x_1, x_2 \in C$ olan elemanlar bulunamaz, ancak $y = 1 \times y$ olarak yazılabilirler, $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = 0$ olabilir.

Teorem. Kapalı ve sınırlı konveks bir kümenin ekstrem noktaları bu kümenin destekleyici hiperdüzlemlerinde yer alır.

Konveks bir küme üzerinde tanımlı (lineer) bir fonksiyonu en büyük veya en küçük yapan değerler



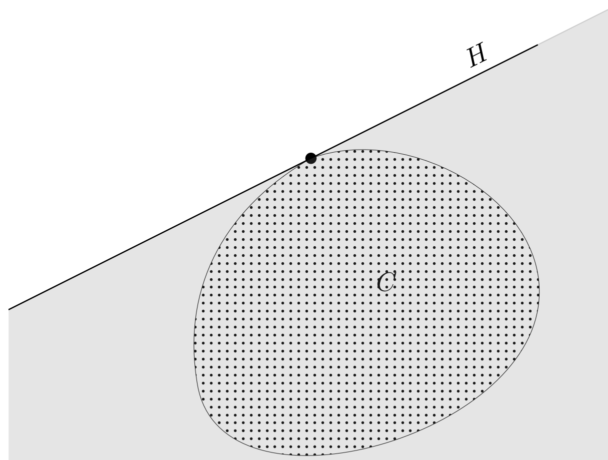
Şekil 2.7: Ortak noktaları olmayan iki kapalı konveks küme bir düzlemle ayırt edilebilir. Bu şekilde C_1 sınırlı kapalı konveks kümeyi göstermektedir.

vardır ve bu konveks kümenin ekstrem noktalardır (Cameron (1985)).

Karar verme problemlerinde verilen koşullarda en iyileme yapılırken, çözümün varlığı çoğu kez çözüm aranacak kümenin konveks olması durumunda söz konusu olabilir. Böyle durumlarda da R^n' de özellikle $n \geq 3$ olan yüksek boyutlarda çözümlemeyi analitik olarak yapmak mümkün olmayacaktır. Fakat çözümün var olduğunu bilmekle sayısal yöntemler kullanılarak arayışına gidilir. Bu derste çoğu karar problemleri R^2'de kurgulanmıştır.Yukarıdaki sonuçlar, sayısal yöntemlere odaklanarak değil, çizim yapılarak kullanılacaktır . Çözümlemeler konveks çok yüzlülere (polytope) bir hiperdüzlem bulma yerine bir doğruyu iteleyerek veya bir başka konveks kümeyi iteleyerek görsel olarak yapılacaktır.

Kaynaklar

[1] D. Blackwell and M.A. Girshick (1979), Theory of games and statistical decisions, *Dover Publications*, New York.



Şekil 2.8: C kapalı konveks bir kümenin sınırında yer alan her noktasından H gibi destekleyici bir düzlem elde edilebilir.

[2] N. Cameron (1985) , Introduction to Linear and Convex Programming, Australian Mathematical Society Lecture Series 1, *Cambridge University Press*, Cambridge, UK. *Dover Publications*, New York.

[2] H. Chernoff and L. E. Moses (1986), Elementary Decision Theory, *Dover Publications*, New York.

[3] B. W. Lindgren (1971), Elements of Decision Theory, *Macmillan Company*, New York.

[4] A. Sabuncuoğlu (2004?), Analitik Geometri, 2. Baskı, *Nobel Yayınları* , Ankara?