İST 304 İstatistik Karar Kuramı ve Yöntemleri **Hafta VII**

Ders 1 : Doğanın Belirsizliğinde Minimaks İlkesi

Dersi anlatan: İhsan Karabulut *Notları yazan: İhsan Karabulut*

Not: *LaTeX ders kalıbı UC Berkeley EECS Bölümü'nündür.*

Doğa durumlarının belirsiz olduğu karar verme problemleri için sunulan örneklerde karar vericiye en az kayıp verdirecek eylem ya da eylemlerin belirlenmesinin genel olduğu görülebilir. Yalnızca sade eylemler arasından birine karar verilmesinin gerek- tiği bir durumda da bu zorlukla karşılaşılır. Doğanın bir durumu için beklenen kayıbı en az yapan bir a sade eylemi doğanın bir diğer durumu veya bazıları için o kadar "iyi" olmayabilir. Yalnızca bir doğa durumunun olduğu karar verme problemlerinde eylemlerin kümesinde arzu edilebilirliğe ve dolayısıyla kayıp değerlerine göre basit (lineer) sıralamanın yapılabilmesi nedeniyle bu seçim sorun yaratmamıştı. Doğanın iki veya daha fazla durumu olması halinde kayıp değerlerinden değil, kayıp vektörlerinden söz edilebilir. Vektörler için evrensel olarak kabul görecek "doğal" bir sıralama yoktur. Buna karşın en iyileme işleminin yapılabileceği akla uygun (makul) ilkeleri olduğu düşünülen iki yöntemden biri **Minimaks ilkesi**(prensibi) dir.

Bu ilke eylemler arasından seçim yapılırken karşılaşabilecek en büyük kaybın dik- kate alınmasıdır; "kötü" eylemler içinden en "iyi"sinin seçimi önerilir. Bu ilkenin uygulama adımları kısaca verilebilir. Verilen her bir $a \in \mathcal{A}$ eylemi için $l(\theta, a)$ kayıp fonksiyonu bütün $\theta \in \Theta$ doğa durumları için değerlendirilir en büyük (maksimum) kaybı olan belirlenir. Bu işlem tüm eylemler için yapılır. Bunlar bir küme oluşturacaktır. Bu kümenin elemanlarını $l\,(a)$ ile gösterecek olursak, bunlar arasından da her $a \in \mathcal{A}$ için değerlendirme yapılarak en küçüğü (minimum) seçilir. En basit haliyle $\mathcal{A} = \{a_1, a_2\}$ olduğunda ve yalnızca sade eylemler arasından seçim yapılmak istendiğinde

$$\sup_{\theta \in \Theta} l(\theta, a_1) < \sup_{\theta \in \Theta} l(\theta, a_2)$$

ise a_1 eylemi a_2 eylemine yeğlenecektir.

Tanım. Bir a_0 eylemi bütün a eylemleri için

$$\sup_{\theta \in \Theta} E(l(\theta, a_0)) \leq \sup_{\theta \in \Theta} E(l(\theta, a))$$

ise veya bu anlatımın alternatifi olarak

$$\sup_{\theta \in \Theta} E(l(\theta, a_0)) = \inf_a \sup_{\theta \in \Theta} E(l(\theta, a))$$

ise minimaks eylemi olarak adlandırılır. Minimaks eylemle karar vericinin yaşayacağı kayıp değeri $\inf_a \sup_{\theta \in \Theta} E(l(\theta, a))$'de minimaks kaybı olarak adlandırılır.

Tanımda 'sup' maksimum anlamında 'maks' ve 'inf' minimum anlamında 'min' ile değiştirilirse minimaks teriminin nasıl oluşturulduğu da anlaşılmış olur. sup, inf ve min, maks her zaman aynı sonuçları veren işlemler olmasalar da çoğu kez min ve maks işlemleri kullanılacaktır; öğrencinin bu kavramları ne zaman ayırdedeceğini bildiği varsayılacaktır. Minimaks ilkesinin belirlediği bu yöntemin uygulamalarında birden fazla minimaks eyleminin de bulunabileceği görülecektir.

Bir a_0 eylemi eylemler içinde tanımlıysa ve yapabilecek eylemlerin kümesinden her a ve her $\theta' \in \Theta$ için

$$L(\theta', a_0) \leq \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta, a)$$

ise minimaks eylemi olması olanaklıdır. Minimaks eylemi $L(.,.)$sonlu olsa da her zaman var olmayabilir. İlerde buna ilişkin bir örnek verilecektir. Aşağıda örnek sade eylemler arasında minimaks eylem bulunmasına ilişkindir.

Örnek. Minimaks yöntemi yukarıda verilen örnek için sade eylemler arasında araştı- rılacaktır. Sade eylemler için $L(\theta_i, a_j) = l(\theta_i, a_j)$ olduğu hatırlansın.

$l(\theta_i, a_j)$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
θ_1	2	4	3	5	3
θ_2	3	0	3	2	5
$\max\limits_{\theta\in\Theta} l(\theta, a_i)$	3	4	3	5	5

$$\begin{aligned}
\min_{a\in\mathcal{A}} \max_{\theta\in\Theta} l(\theta, a) &= \min_{a\in\mathcal{A}} \{l(\theta_2, a_1), l(\theta_1, a_2), l(\theta_2, a_3), l(\theta_1, a_4), l(\theta_2, a_5)\} \\
&= \{l(\theta_2, a_1), l(\theta_2, a_3)\}
\end{aligned}$$

olduğunu görülür. Sade eylemler arasından iki tane minimaks eylemi var ve bunlar a_1 ve a_3 sade eylemleridir. Karar verici bu ilkeye göre iki eylemden birini belirleyip kullanabilir.

Not. Minimaks yönemi ile iki minimaks eylemi belirlenmiş olmasına karşın a_1 sade eylemi her $\theta \in \Theta$ için $l(\theta_1, a_1) \leq l(\theta, a_3)$ olduğundan karar vericinin yalnızca a_1 sade eylemini kullanmasının uygun olduğu söylenebilir.

Aynı karar verme problemi için minimaks ilkesi pişmanlık fonksiyonuna uygulandığın- da bulunacak minimaks eyleminin kayıp fonksiyonuyla elde edilenden başka bir eylem olduğu görülür. Probleme ilişkin sade eylemlere ait pişmanlık fonksiyonu değerleri ve her sade eylem için yaşanabilecek en büyük pişmanlık değerlerinin bulunduğu tablo aşağıda verilmiştir.

$r(\theta_i, a_j)$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
θ_1	0	2	1	3	1
θ_2	3	0	3	2	5
$\max\limits_{\theta\in\Theta} r(\theta, a_i)$	3	2	3	3	5

Bunların en küçüğü a_2 eylemine ait olan pişmanlık değeridir $\min\limits_{a} \max\limits_{\theta\in\Theta} r(\theta, a_i) = r(\theta_1, a_2)$, bu nedenle pişmanlık fonksiyonuyla sade eylemler arasından belirlenen minimaks eylem a_2 eylemidir.

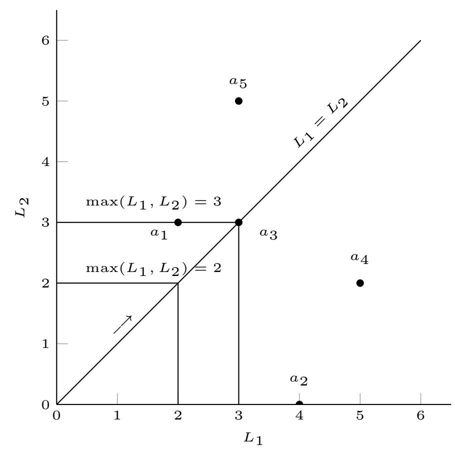
Doğanın durum uzayı iki eleman içerdiğinde bu çözümlemeler grafiksel olarak da yapılabilir, bu karar problemine ilişkin başka sonuçlar çıkarılabileceğinin bir yolunu da gösterecektir. Kayıp fonksiyonunun kullanıldığı durumda verilen bir $a \in \mathcal{A}$ eylemi için doğanın iki durumu için beklenen kayıplar R^2 de (L_1, L_2) olarak gösterilsin. $L_1 > L_2$ olduğunda (L_1, L_2) noktası I. bölgede $L_1 = L_2$ olan doğrunun (L_1 ile 45° açı yapan doğru) altında kalan bölgede, $L_1 < L_2$ olduğunda ise bu doğrunun üstünde kalan bölgede yer almış olacaktır. $L_1 = L_2$ olduğunda da bu doğrunun üzerinde bulunacaktır. Minimaks eylemi $L_1 = L_2$ doğrusunun üstündeki bölgede yer alan eylemler için $L_2 = c$ gibi yatay bir doğru parçası c artırılarak ilk kez bir (L_1, L_2) noktasına değene kadar kaydırılarak bulunacaktır. Minimaks eylemi $L_1 = L_2$ doğrusunun altındaki bölgede yer alan eylemler için $L_1 = c$ gibi dikey bir doğru parçası c artırılarak ilk kez bir (L_1, L_2) noktasına değinceye kadar ötelenerek bulunacaktır. Minimaks eylem $L_1 = L_2$ doğrusunun üzerindeki bölgede ilk karşılaşılan (L_1, L_2) noktasının (yada noktalarının) ilk bileşenini (dikey) altında kalan bölgede ilk karşılaşılan (L_1, L_2) noktanın (yada noktaların) ilk bileşenlerini karşılaştırılarak bulunur.

Bu işlem tek çırpıda bir köşesi $(0, 0)$ noktasından geçen bir **karenin** ilk noktaya değinceye kadar büyültülerek de yapılabilir. $\{(L_1, L_2) : \max(L_1, L_2) = c\}$ kümesi R^2 de enbüyük (maksimum) bileşeni c olan noktaların kümesini göstersin. Bu küme $L_2 = c$ yatay doğrusu ile sınırlanan ve $L_1 < c$ olan bölge ve $L_1 = c$ dikey doğrusu ile sınırlanan ve $L_2 < c$ olan iki bölgenin kesişiminden oluşmaktadır.

Kesişim kümesi (c, c) sağ üst köşe noktası I.bölgede yer alan 45°lik doğru üzerinde olan karesel bir (kör) kamayı andırır.

Örnek olarak verilen karar probleminde sade eylemler arasından minimaks eylem ya da eylemlerin belirlendiği grafik Şekil'de verilmiştir. Görüldüğü gibi grafik veya kayıp fonksiyonu değerleri tablosunun kullanılmasıyla elde edilen minimaks eylemler aynı a_1, a_3 eylemlerdir, minimaks kayıpları da 3 dür

Aşağıda yer alan Şekil'deki çizimde aynı karar verme probleminde sade eylemler arasından minimaks

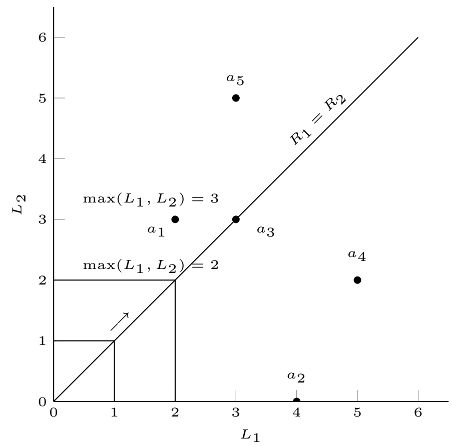


Şekil 1.1: Kayıp fonksiyonu kullanıldığında yukarıdaki örnek için sade eylemler arasından minimaks eylem ya da eylemlerin belirlenmesinin grafiksel olarak yapılması.

ilkesi ile pişmanlık fonksiyonu kullanılarak minimaks eylem ya da eylemlerin grafik kullanılarak belirlenmesi gösterilmiştir. Grafik kullanılarak a_2 sade eyleminin minimaks eylem ve minimaks pişmanlık değerinin de 2 olduğu Şekil üzerinde görülebilir.

Doğanın iki durumu olduğunda, karma eylemlerin de bulunduğu bütün eylemler kümesi içinden, minimaks eylem ya da eylemler bu grafiksel yöntem kullanılarak bulunabilir. Tüm sade ve karma eylemler ve bunlara ait kayıp fonksiyonu değerlerinin bir tablo halinde gösterilemeyeceği düşünüldüğünde bu eylemler arasından minimaks eylem kararının grafik yöntemle elde edilebilmesinin önemi anlaşılacaktır. Bu yöntem doğa durumlarının sayısı ikiyi geçtiğinde kullananışsız olacaktır. Bununla birlikte grafik yöntemi, karar verme kuram ve kavramlarının daha iyi anlaşılmasını, doğa durumlarını sayısı ne olursa olsun karar verme problemlerinin çözümlemerde kullanılan analitik ya da sayısal yöntemleri konusunda bilgi verici olacaktır. Kayıp veya pişmanlık fonksiyonu ile çalışmak yine karar vericinin bir seçimi olacaktır.

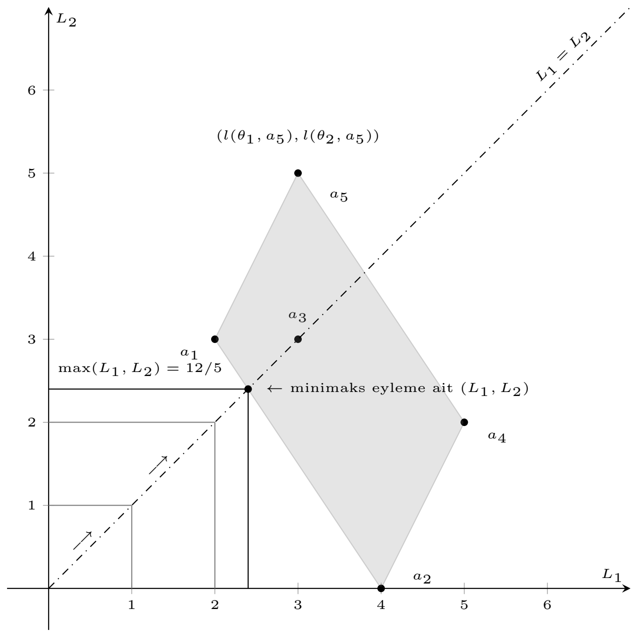
Tüm sade ve karma eylemlerin kayıp fonksiyonu (ve pişmanlık fonksiyonu) beklenen kayıp (ve beklenen pişmanlık) vektörlerinin kümesinin kapalı bir konveks küme olduğu bilinmektedir. Önceki sayfalarda örnek karar verme problemlerinde verilen kayıp fonksiyonu ve pişmanlık fonksiyonu vektörlerini kullanarak her iki durumda da bu konveks kümeleri belirlenmişti.



Şekil 1.2: Pişmanlık fonksiyonu kullanıldığında yukarıdaki örnek için sade eylemler arasından minimaks eylem ya da eylemlerin belirlenmesinin grafiksel olarak yapılması.

İki doğa durumunu bulunduğu bir karar verme probleminde tüm sade ve karma eylemler arasından minimaks eylem ya da eylemleri ve bunların minimaks kaybını grafik yoluyla belirlemek için öncelikle sade eylemlere ait kayıp vektörlerinin oluştur- duğu konveks kabuk elde edilir. Sonra bir ucu-örnek karar verme probleminde karenin sağ üst köşesi- $L_1 = L_2$ ya da pişmanlık fonksiyonu kullanıldığında $R_1 = R_2$ doğrusu üzerinde olan kör kama (kare) konveks kabuğa ilk kez değinceye kadar ötelenir. Kör kamanın ilk kez değdiği nokta ya da noktalar minimaks eylem ya da eylemlerin beklenen kayıp vektörü (ya da vektörleri) olacaktır. Böylece, minimaks eylem ya da eylemlerin betimlemesi yapılır, minimaks kaybı (ya da pişmanlığı) belirlenir. Eğer minimaks eylem yalnızca bir tane ise bu eylemin minimaks kaybı -minimaks eylemin uygulanması sonucunda karşılaşılacak beklenen kayıp değeri-karenin konveks kabuğa ilk kez değdiği $L_1 = L_2$ noktasındaki değerlerden biri olacaktır.

Örnek (Yukarıdaki örneğe devam). Örnek karar verme problemine ilişkin grafikten de görüldüğü gibi sağ üst köşesi $L_1 = L_2$ doğrusu üzerinde olmak üzere büyültülen karenin konveks kabuk ile ilk teması, konveks kabuğun a_1, a_2 ”köşe” noktalarının uç noktaları olduğu doğru parçası üzerindedir bu noktada da $L_1 = L_2$ dır. O halde bu noktanın bileşenlerini analitik olarak bulmak için x, y nin sırasıyla L_1, L_2 nin yerini aldığı aşağıdaki denklem sistemi çözülmelidir: R^2 de iki noktası verilen bir doğru parçası üzerindeki tüm noktalara ait kümenin gösteriminden (gösterimde buradaki $p \in [0, 1]$



Şekil 1.3: Örnek karar verme problemi için tüm sade ve karma eylemler arasından minimaks eylemin grafikle belirlenmesi.

yerine, $w \in [0, 1]$ gösterimi kullanılmıştı) $p \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (1 - p) \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu noktanın bileşenleri için $x = y$ dir ve $x,\ p$ bilinmeyenleri kolayca (ve tutarlı olarak) bulunur.

$$2p + (1 - p)4 = 3p$$

eşitliğinden önce $p = 4/5$ bulunur, sonra $x = 12/5$ olduğu hesaplanır. Karma minimaks eyleminin karar vericiye kaybı, minimaks kaybı $L_1 = L_2 = 12/5$ olup bu karma eyleme ilişkin olasılık dağılımı $p = (4/5, 1/5, 0, 0, 0)$ dır. Buna göre karar verici 4/5 olasılıkla a_1 ve 1/5 olasılıkla a_2 eylemini yapmalı, a_3, a_4 ve a_5 eylemleri yapmamalıdır.

Burada dikkati çekmesi gereken önemli bir bulgu da şudur: Bulunan karma eyleme ilişkin kayıp sade eylemlerden, her iki doğa durumunda eşit kayba yol açan a_3 eyleminden, daha az olmaktadır! Doğal olarak eylem kümesi içinde yer almayan karma eylem- rasgele, karar vericinin bile önceden hangi eylemi uygulayacağını bilmeden yapacağı eylem- daha az beklenen kayba sahiptir.

Grafiksel yöntem karar verme problemlerinde doğanın durum sayısı arttıkça kullanışsız hale gelecektir. Ancak doğanın durumu sonlu sayıda sade eylemlerin sayısı da sadece iki tane ise grafiksel yöntem kullanışlılığını sürdürür. Oluşturulacak karma eyleme ilişkin olasılık dağılımı $(p, 1-p)$ formundadır. Aşağıdaki örnekte böyle bir karar verme problemi ele alınmakta ve minimaks ilkesi kullanılarak karar vericinin eylemi belirlenmektedir.

Örnek. $\Theta = \{\theta_1, \theta_1, \theta_3, \theta_4\}$, $\mathcal{A} = \{a_1, a_2\}$ ve aşağıda kayıp fonksiyonunun verildiği karar verme problemi için minimaks eylem ya da eylemleri araştırılmak istensin.

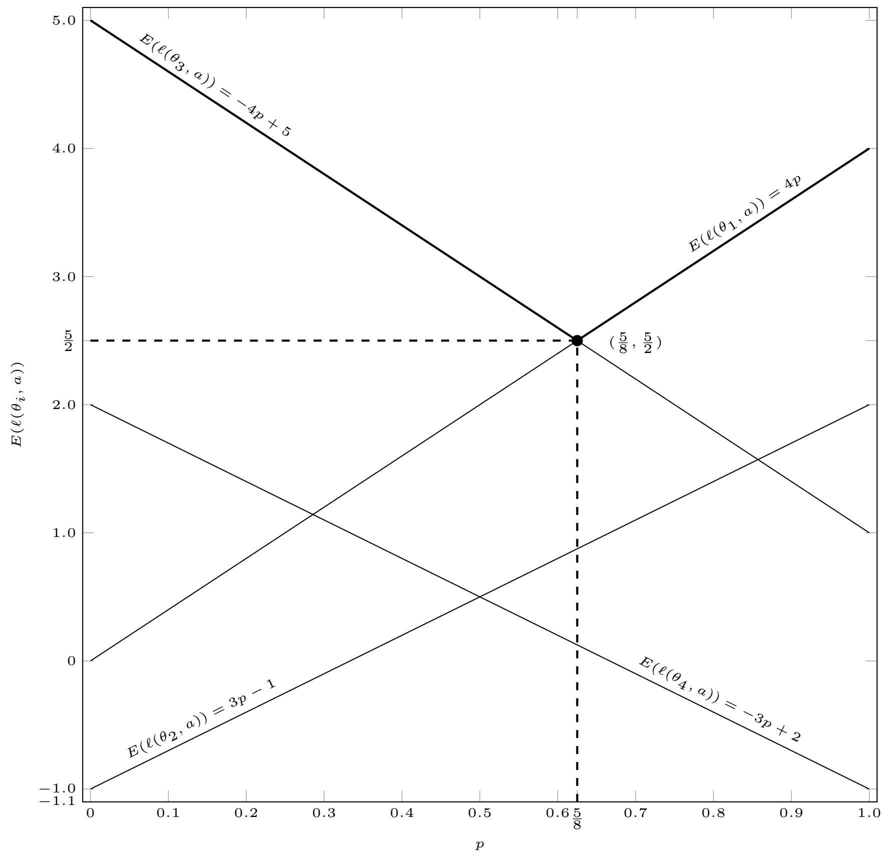
	$\ell(\theta_i, a_j)$	
	a_1	a_2
θ_1	4	0
θ_2	2	-1
θ_3	1	5
θ_4	-1	2

Her bir θ_i doğa durumu için herhangi bir $a \sim [a_1, a_2]_{(p,1-p)}$ karma eyleminin beklenen kaybı

$$E(l(\theta_1, a)) = 4p$$
$$E(l(\theta_2, a)) = 3p - 1$$
$$E(l(\theta_3, a)) = -4p + 5$$
$$E(l(\theta_4, a)) = -3p + 2$$

olacaktır. Bunların her biri değişen $p \in [0, 1]$ değerleri için bir doğru parçası tanımlar. Bunların tümüne bakıp en yukarıda (maksimum) konumlanan doğru parçalarından hareketle maksimum kayıplı eylemlerden arasından kayıpları minimum yapacak olan sade ya da karma eylemlere ulaşılır.

Not. Aynı değişken ya da değişkenlerin bir dizi fonksiyonlarından haraketle yeni bir fonksiyon tanımlanabilir. Aşağıda da görüleceği gibi doğrusal fonksiyonlar için bulunan fonksiyon bir zarfın kapağını betimleyen çizim olarak ortaya çıkabilir. Bu nedenle yapılan işlem kabaca doğrusal fonksiyonların zarfını elde etmek olarak ifade edilebilir.



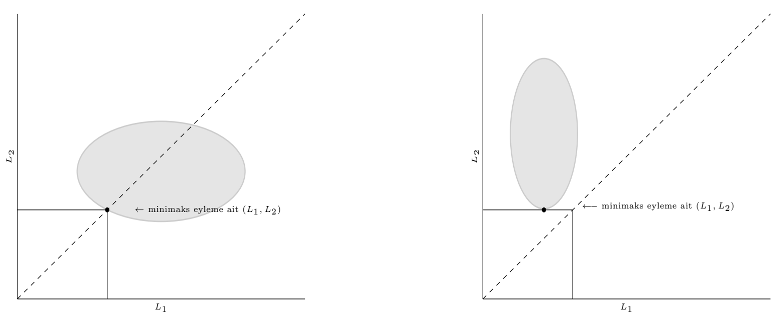
Şekil 1.4: Dört doğa durumu ve iki sade eylemin olduğu örnek karar verme problemi için tüm sade ve karma eylemler arasından minimaks eylemin grafikle belirlenmesi.

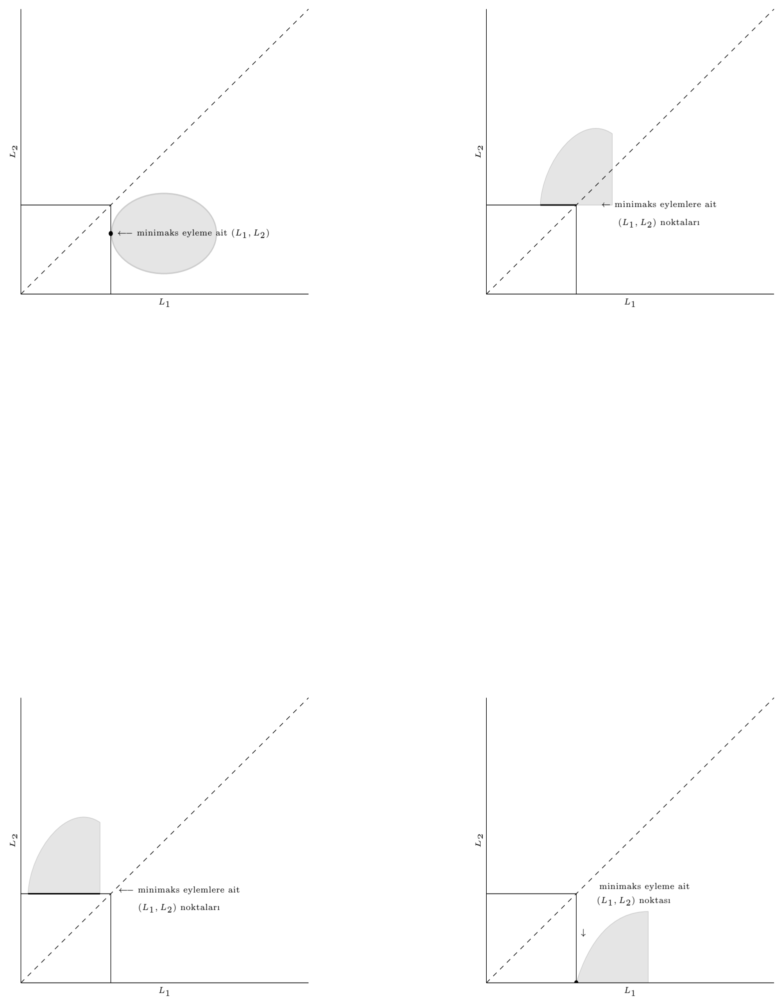
Bütün eylemlerin kümesi içinde maksimum kayıplar θ_1 ve θ_3 doğa durumlarında oluşur. Bu eylemlerin bu doğa durumları altında uygulanması halinde karar vericinin beklenen kayıpları Şekilde'de verilen grafikte θ_1 doğa durumuna ilişkin $4p$ ve θ_3 doğa durumuna ilişkin $-4p + 5$ beklenen kayıp doğrularının kalın çizilmiş kesitleri üzerinde yer alır. Minimaks eylem yada eylemler bu noktaların tanımladığı eylemler arasında en küçük beklenen kayıplı olanıdır. Minimaks eylem $4p$ ve $-4p + 5$ doğru parçaları ile oluşan zarf kapağı biçimli fonksiyonun alt ucunda, iki doğrusal fonksiyonun keşim noktasının tanımladığı eylem olarak belirlenir. İki doğru parçasının kesişme noktası $(5/8, 5/2)$ analitik olarak önce

$$-4p + 5 = 4p$$

eşitliği çözülerek $p = 5/8$ bulunur, bu değer $4p$ ya da $-4p+5$ de yerine konularak eylemin beklen kaybının $5/2$ olduğu hesaplanır. sonra Bu durumda minimaks eylem $a_1$sade eyleminin $5/8$ olasılıkla, a_2 sade eyleminin $3/8$ olasılıkla yapıldığı eylem olarak yada sadece $p = (5/8, 3/8)$ olasılık dağılımı ile tanımlanan $a \sim [a_1, a_2]_{(5/8,3/8)}$ eylemdir. Burada izlenen yol önce **grafiksel olarak** $\max_{\theta \in \Theta} E(\ell(\theta, a))$ (zarf biçimli) fonksiyonunun belirlenmesi sonra da minimum yapan a karma eyleminin bulunmasıdır.

Genel olarak grafiksel yol izlendiğinde bulunabilecek minimaks eylemler konveks kabuğun biçimine ve konumuna göre değişecektir. Tek minimaks eylem olabileceği gibi (sayılamaz) sonsuz sayıda minimaks eylem de belirlenebilir. Aşağıdaki Şekil'de değişik konumlarda farklı konveks kümelerle bulunacak mimimaks eylemlere örnek- ler verilmiştir. Çizimler Chernoff ve Moses ss.149'dan alınmıştır. Minimaks ilkesinin kullanıldığı karar verme problemlerinde ulaşılan minimaks eylemler çoğu kez karma eylemlerdir.





Şekil 1.5: Karar problemlerinde üretilebilecek değişik konveks kabukların R^2'deki konumları ve minimaks eylem ya da eylemleri tanımlayan nokta kümeleri. Minimaks eylemler çoğu kez karma eylemlerdir.

İST 304 İstatistik Karar Kuramı ve Yöntemleri **Hafta VII**

Ders 2 : Doğanın Belirsizliğinde Bayes İlkesi I

Dersi anlatan: İhsan Karabulut *Notları yazan: İhsan Karabulut*

Bayes İlkesi

Minimaks ilkesi kullanarak bulunan eylemler karar vericiyi karşılaşılabilecek en büyük kayba karşı korur; "kötüler" içinden "iyisi"ne karar verilir. Bu ilkeyi uygulayan çok tedbirli, belki de biraz kötümser denebilecek bir karar verici kayıplar konusunda çok kaygılı olması nedeniyle çok az bir *olabilirliğe* sahip ancak kendisine çok kayıp verdirecek doğanın durumunu da diğer doğa durumlarıyla aynı olabilirlikle dikkate almak durumundadır. Olabilirliği az olan bir doğa durumu neden daha az kayıplı eylemlere karar verilmesine engel olsun? Doğanın bir durumuyla "ne ölçüde karşılaşılabilir" sorusuyla birlikte böyle bir sorgulama **sabit** olarak algılanan doğanın durumlarının da tıpkı sade eylemler için yapıldığı gibi karar verme sürecine rasgele bir unsur olarak katılabileceğini düşündürür. Karar verici isterse doğanın durumunun rasgele olabileceğini kabul etmesin, doğanın **hangi olabilirlik** (şimdilik nasıl anlaşılırsa anlaşılsın) ile karar verme sürecine katılabileceği konusundaki **önsel** (prior, priori) yargı, deneyim ve bilgisini katması akılcı olabilecektir. Böylece doğanın bulunabileceği durumlar ve bu doğa durumunda karşılaşılabilecek kayıplar ağırlıklandırıla- cak ve uç durumlar ağırlıklarınca alınacak kararda yer alacaktır.

Daha önce a_j gibi sade bir eylemin beklenen kaybının verilen θ_i doğa durumu altında kayıp fonksiyonu değeri $l(\theta_i, a_j)$'ne eşit olduğunu hatırlayınız. Doğa durumunun da rasgele olduğu bu durumda sade bir eylemin beklenen kaybından söz edilebilir! Çünkü a_j sade eylemi θ_1 ve θ_2 doğa durumlarında, sırasıyla $l(\theta_1, a_j)$ ve $l(\theta_2, a_j)$ kayıp değerlerinden birine sahip olacaktır. Bu durumda hangi doğa durumunda bulunulacağı rasgele olacak ve a_j sade eylemi için bir kayıp değerinden söz edildiğinde bu değer beklenen kayıp olacaktır.

Örnek.(Asansör örneğine devam). Üçüncü katta çalışan birey, geçmişteki deneyimlerine göre, asansörü kullanma ihtiyacı duyduğu beş durumdan dördünde asansörün çalışır durumda olduğunu düşünmektedir. Bu **önsel bilgi** ile asansörün çalışır olması θ_1 doğa durumu için 0.8 ve asansörün bozuk olması θ_2 doğa durumu için 0.2 ağırlıklarını olasılık olarak değerlendirip kullanarak belirlenen bir *a sade eylemi için beklenen kayıp* hesaplanabilir.

	$l(\theta_i,a_j)$			
	a_1	a_2	Önsel	Beklenen Kayıp
θ_1	0	1	0.8	$E(l(\boldsymbol{\theta}, a_1)) = 1.2$
θ_2	6	5	0.2	$E(l(\boldsymbol{\theta}, a_2)) = 1.8$

Örneğin, a_2 sade eyleminin rasgele doğa durumu altında beklenen kaybı

$$E(l(\boldsymbol{\theta}, a_2)) = 0.8l(\theta_1, a_2) + 0.2l(\theta_2, a_2) = 1.8$$

olarak hesaplanacaktır.

Gösterim için not. Rasgele doğa durumları için kullanılacak gösterim ve terminoloji rasgele değişkenlerde olduğu gibidir. Bundan sonraki konularda doğa durumlarının uzayı Θ'nın alt kümelerinden biri ile tanımlanması rasgele bir olay olarak değerlendirilecek ve doğa durumu rasgeleliği göstermek üzere koyu harfle $\boldsymbol{\theta}$ gösterile- cektir. $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \cdots\}$ gibi sayılabilir doğa durumunun olduğu bir karar probleminde bulunulacak doğa durumu θ_i doğal ya da sayma sayılarıyla ile gösterildiğinde örneğin $\theta_1 = 1, \theta_2 = 2$ v.b. doğa durumu kesikli değer alan bir rasgele değişken olarak tanımlanacaktır. Sayılamaz sonsuzlukta doğa durumunun bulunduğu bir karar verme probleminde de gösterimde reel sayılar kullanılacak, kesikli yada sürekli değerler alan doğa durumu rasgele değişkeni için olasılık dağılımı *önsel dağılım* olarak adlandırılacaktır. Verilecek örneklerde doğa durumlarının sonlu sayıda olması nedeniyle $\theta_i \in \Theta$ olmak üzere i doğa durumunda bulunma olasılığı için $P(\boldsymbol{\theta} = \theta_i)$, $P(\boldsymbol{\theta} = i)$ veya $p(\theta_i)$ gösterimlerinden biri yazım kolaylığı gözetilerek kullanılacaktır. Kesikli doğa durumları için olasılık fonksiyonu $g(\theta_i) = P(\boldsymbol{\theta} = \theta_i)$ ile gösterilecektir. Bu gösterime göre olasılık fonksiyonu için $g(\theta_i) \geq 0$ ve $\sum_{\theta_i \in \Theta} g(\theta_i) = 1$ olduğu; $\boldsymbol{\theta}$'nın mutlak sürekli olduğu durumda da toplama işaretinin yerini integral işaretinin alacağı hatırlanmalıdır.

Tanım. $g(\theta)$ doğanın durumları için verilen bir önsel dağılımı göstermek üzere, verilen bir sade a eyleminin sonucu olan kayıp $l(\theta, a)$ rasgele bir değişkendir ve beklenen değeri

$$B(a) = \sum_{\theta_i \in \Theta} g(\theta_i)\ l(\theta_i, a)$$

a **eyleminin Bayes kaybı**, Bayes kayıplarını enaz (minimum) yapan eylem ya da eylemlere de **Bayes eylemi** adı verilir. $B(a^*) = \min_a B(a)$ sağlayan a^* bir Bayes eylemidir.

$\mathcal{A}$ kümesindeki tüm sade eylemlerin sayısı m olmak üzere a $p = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m)$ olasılık dağılımı ile belirlenen bir karma eylem olsun. Verilen bir $\theta \in \Theta$ için bu eylemle beklenen kayıp

$$E(l(\theta, a)) = \sum_{j=1}^{m} p_j\, l(\theta, a_j)$$

dır. a karma eyleminin belirlenen (verilen) $g(\theta)$ önsel dağılım kullanılarak Bayes kaybı

$$\begin{aligned} B(a) &= \sum_{i=1} g(\theta_i)\ E(l(\theta_i, a)) \\ &= \sum_{i=1} g(\theta_i) \left(\sum_{j=1}^{m} p_j\, l(\theta_i, a_j) \right) \end{aligned}$$

olarak hesaplanacaktır. Buradan da görülecektir ki verilen önsel dağılım altında a karma eyleminin Bayes kaybı $B(a)$ $p = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m)$ olasılık dağılımının bir fonksiyonudur. Bu durumda karma bir eylemin Bayes kaybını $B(a)$ yerine $B(p)$ olarak göstermek uygun olacaktır çünkü karma eylemler olasılık dağılımlarına göre birbirlerinden ayırt edilebilirler. Bu durumda Bayes ilkesinin kullanıldığı bir karar probleminde Bayes eyleminin belirlenmesi tüm eylemler arasında Bayes kaybı en küçük olan bir a karma eyleminin saptanması olduğu kadar Bayes kaybını en küçük yapacak $p = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m)$ olasılık dağılımının ya da $p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$ olasılıkları- nın saptanması olarak da tarif edilebilir.

Örnek (Asansör problemine devam). Önsel olasılıklar $w \in [0,1]$ olmak üzere $g(\theta_1) = w,\ g(\theta_2) = 1 - w$ tanımlansın. a_1 eyleminin Bayes kaybı

$$\begin{aligned} B(a_1) &= wl(\theta_1, a_1) + (1-w)l(\theta_2, a_1) \\ &= w0 + (1-w)6 \\ &= 6 - 6w \end{aligned}$$

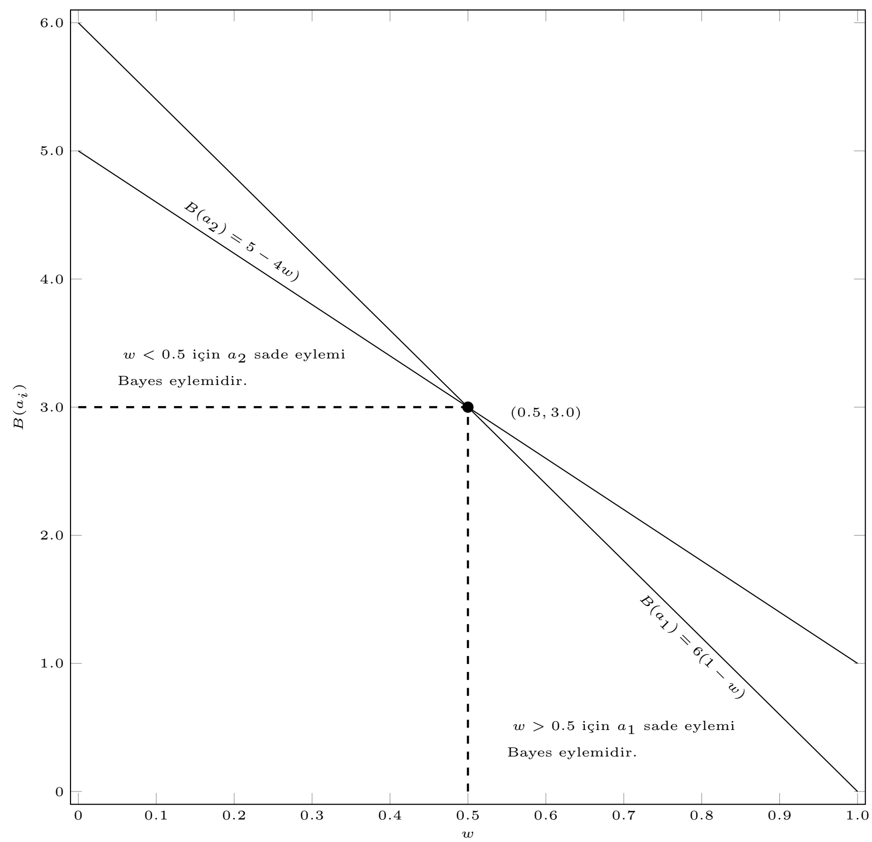
dır.

Benzer olarak a_2 eylemi için Bayes kaybı $B(a_2) = 5 - 4w$ olarak hesaplanır. Şekil'deki çizimden de bunların doğru parçalarına ait ifadedeler olduğu görülebilir. Bu doğru parçaları birbirini $w = 0.5$ olduğunda keserler. Çizimden de anlaşılacağı gibi $w < 0.5$ olduğunda a_2 sade eylemi, $w > 0.5$ olduğunda ise a_1 sade eylemi en küçük Bayes kayıbını verirler. $w = 0.5$ ise bu iki eylemden hangisinin yapılacağı önem taşımamaktadır.

	$l(\theta_j,a_i)$		
	θ_1	θ_2	$B(a_i)$
a_1	0	6	$6-6w$
a_2	1	5	$5-4w$
$g(\theta_j)$	w	$1-w$	

w'nin küçük olması asansörün çalışıyor olması olasılığının küçük olmasıdır, durum bu ise a_2 eylemine karar verilmesini makul (akılcı) kılar. öte yandan büyük bir w olasılığı asansörün çalışma olasılığının yüksek olması; Bayes eyleminin de a_1 olmasını ifade edecektir.

Örnekte olduğu gibi sadece iki doğa durumuna sahip, sonlu sayıda a sade eylemlerinin olduğu bir karar problemi için de Bayes kaybı $B(a) = \sum_{i=1}^{2} g\left(\theta_i\right)\, l\left(\theta_i, a\right)$, verilen $g\left(\theta_i\right)$ önsel dağılımı ile elde edilir; $B(a)$ yukarıdaki gösterimle w olasılığının doğrusal fonksiyonları olur. Verilen bir w değeri için her bir a sade eylemine ilişkin $B(a)$ değerleri grafik kullanılarak tespit edilebilir. Grafik üzerinden hangi w önselleri için hangi a sade eyleminin ya da sade eylemlerinin Bayes eylemi olacağı görsel



Şekil 2.6: Asansör probleminde $(w, 1-w)$ önsel dağılımı ile sade eylemlere ilişkin Bayes kaybı.

olarak belirlenebilir.

Bir karar probleminde eylem uzayındaki tüm sade eylemlerin sayısı m olmak üzere bir $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ karma eylemi için Bayes kaybı:

$$\begin{aligned}
B(p) &= \sum_{i=1} g(\theta_i) \left(\sum_{j=1}^{m} l(\theta_i, a_j) p_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} p_j \left(\sum_{i=1} g(\theta_i) l(\theta_i, a_j) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} p_j B(a_j)
\end{aligned}$$

dır. Birinci eşitlikteki parantez içinde yer alan toplam karma eylemin beklenen kaybını göstermektedir. İkinci eşitlikte parantez içinde yer alan $\sum_{i=1} g(\theta_i)l(\theta_i, a_j)$ toplamı a_j sade eyleminin $g(\theta_i)$ önsel dağılım altında $B(a_j)$ Bayes kaybından başka bir şey değildir. O halde **karma bir eylemin Bayes kaybı sade eylemlerin Bayes kayıplarının konveks kombinasyonu olarak elde edilebilir.** Sade eylemlere ilişkin Bayes kayıpları verildiğinde tanımlanmış karma bir eylemin Bayes kaybı kolayca elde edilebilir.

İki doğa durumunun bulunduğu karar problemlerinde R^2'de (L_1, L_2) düzleminde Bayes eyleminin belirlenmesi grafiksel olarak yapılabilir. Aşağıdaki grafikte L_1, herhangi bir eylemin θ_1 durumunda beklenen kaybı, L_2, θ_2 durumunda beklenen kayıplarını göstersin. Verilecek örnekte sade eylem sayısı ikidir ancak açıktır ki doğanın iki durumu var olduğunda herhangi bir sayıda(örneğin m tane) sade eylemin bulunduğu bir karar problemi için grafik yöntemi kullanılabilir.

Kaynaklar

[1] D. Blackwell and M.A. Girshick (1979), Theory of games and statistical decisions, *Dover Publications*, New York.

[2] H. Chernoff and L. E. Moses (1986), Elementary Decision Theory, *Dover Publications*, New York.

[3] B. W. Lindgren (1971), Elements of Decision Theory, *Macmillan Company*, New York.