İST 304 İstatistik Karar Kuramı ve Yöntemleri **Hafta XIV**

Ders 1 : Olabilirlik Oranı Test İstatistiği

Dersi anlatan: İhsan Karabulut *Notları yazan: İhsan Karabulut*

Not: *LaTeX ders kalıbı UC Berkeley EECS Bölümü'nündür.*

Karar fonksiyonları kümesi içinden bir test istatistiğini kullanarak A eylemine karar vermek ancak rasgele örnekleme ait gözlem veya gözlemlerin C kümesinde yer alması ile olanaklıdır. θ doğa durumu altında karar vericinin A eylemini yapma olasılığı

$$P(X \notin C \,|\theta\,) = 1 - P(X \in C \,|\theta\,)$$

dır. θ doğa durumu koşulu altında X'in olasılık fonksiyonu $f(x\,|\theta\,)$ kullanılarak bulunabilir. Bir test istatistiğinin kullanılmasıyla C kritik kümesine göre A ya da B eylemlerinden birinin yapılmasına karar verilecektir. Bu durumda verilen bir $\theta \in \Theta$ ve test istatistiği veya belirlediği C kritik bölgesi için risk fonksiyonu basit veya karmaşık hipotezler için

$$R(\theta, C) = r(\theta, A)(1 - P(X \in C\,|\theta\,)) + r(\theta, B)P(X \in C\,|\theta\,)$$

olacaktır. $\theta \in \Theta_0$ olması halinde yukarıda verilen pişmanlık fonksiyonunda $r(\theta, A) = a(\theta)$ ve $r(\theta, B) = b(\theta)$ için

$$\begin{aligned} R(\theta, C) &= 0 \times (1 - P(X \in C\,|\theta\,)) + b(\theta)P(X \in C) \\ &= b(\theta)P(X \in C\,|\theta\,) \end{aligned}$$

ve $\theta \in \Theta_1$ olması halinde

$$\begin{aligned} R(\theta, C) &= a(\theta)(1 - P(X \in C\,|\theta\,)) + 0 \times P(X \in C\,|\theta\,) \\ &= a(\theta)(1 - P(X \in C\,|\theta\,)) \end{aligned}$$

olarak elde edilecektir. C kritik bölgesiyle belirlenmiş test istatistiğinin risk fonksiyonu özetle

$$R(\theta, C) = \begin{cases} b(\theta)P(X \in C\,|\theta\,) & , H_0 : \theta \in \Theta_0 \;\text{ doğru ise} \\ a(\theta)(1 - P(X \in C\,|\theta\,)) & , H_1 : \theta \in \Theta_1 \;\text{ doğru ise} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım. $\theta \in \Theta$ için $P(X \in C\,|\theta\,)$ H_0 hipotezini reddetme olasılıklarının fonksiyonu

$$\pi(\theta) = P(X \in C\,|\theta\,)$$

C kritik bölgesiyle belirlenen test istatistiğinin güç fonksiyonu olarak adlandırılır.

Kayıp fonksiyonu ve test istatistiğine ait güç fonksiyonunun bilinmesi teste ait risk fonksiyonunun hesaplanması için yeterlidir.

$H_0 : \theta \in \Theta_0$ doğru iken $P(X \in C\,|\theta\,) = 0$ ve $H_1 : \theta \in \Theta_1$ doğru iken $P(X \in C\,|\theta\,) = 1$ olan bir test istatistiği bulunmuş olsaydı kuşkusuz ideal. Böyle bir durumda risk fonksiyonu her doğa durumu için

$$R(\theta, C) = \begin{cases} 0 & , H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ doğru ise} \\ 0 & , H_1 : \theta \in \Theta_1 \text{ doğru ise} \end{cases}$$

olurdu. Böyle bir test istatistiği **ideal test istatistiği** olarak adlandırılırsa bu test istatistiğinin güç fonksiyonu da

$$\pi(\theta) = P(X \in C\,|\theta\,) = \begin{cases} 1 & , H_1 : \theta \in \Theta_1 \text{ doğru ise} \\ 0 & , H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ doğru ise} \end{cases}$$

ideal güç fonksiyonu olarak adlandırılacaktır.

Basit hipotez durumu ve ilgili pişmanlık fonksiyonu dikkate alındığında doğa durumları uzayı $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ olmak üzere $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ ve $\Theta_1 = \{\theta_1\}$ olacaktır. Bu durumunda C kritik bölgesiyle belirlenen test istatistiğinin θ_0 ve θ_1 doğa durumlarında risk fonksiyonu

$$R(\theta, C) = \begin{cases} bP(X \in C \,|\theta\,) & , H_0 : \theta = \theta_0 \text{ doğru ise} \\ a(1 - P(X \in C \,|\theta\,)) & , H_1 : \theta = \theta_1 \text{ doğru ise} \end{cases}$$

Bu da $\theta = \theta_0$ için

$$\begin{aligned} R(\theta_0, C) &= bP(X \in C \,|\theta_0\,) \\ &= b\pi(\theta_0) \end{aligned}$$

ve $\theta = \theta_1$ için

$$\begin{aligned} R(\theta_0, C) &= a(1 - P(X \in C \,|\theta_1\,)) \\ &= a(1 - \pi(\theta_1) \end{aligned}$$

dir. Basit hipotezlerin varlığında güç fonksiyonunun aldığı değerlerden

$$\alpha = \pi(\theta_0)$$

ın **I.tip hata**

ve

$$\beta = 1 - \pi(\theta_1)$$

in **II.tip hata** olduklarına dikkat edilirse risk fonksiyonu

$$R(\theta, C) = \begin{cases} b\alpha & , H_0 : \theta = \theta_0 \text{ doğru ise} \\ a\beta & , H_1 : \theta = \theta_1 \text{ doğru ise} \end{cases}$$

olarak yazılacaktır. Bu anlamda pişmanlık fonksiyonu tablosunda **$\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{1}$ olması halinde test istatistiğine ait risk fonksiyonu değerlerinin θ_0 ve θ_1 doğa durumlarında sırasıyla testin I.tip ve II.tip hatalarına eşit oldukları görülür.**

X istatistiği m değişik değer alan kesikli bir rasgele değişken olmak üzere bu istatistiğe ait $f(x\,|\theta\,)$ olasılık fonksiyonu $\theta \in \Theta_0$ için

$$f_0(x) = f(x\,|\theta_0\,) = P(X = x\,|\boldsymbol{\theta} = \theta_0\,)$$

ve $\theta \in \Theta_1$ için

$$f_1(x) = f(x\,|\theta_1\,) = P(X = x\,|\boldsymbol{\theta} = \theta_0\,)$$

olarak gösterilecektir. Basit hipotezler durumunda da aynı gösterim kullanılacaktır.

Yine basit hipotezler durumunda parametre için $g(\theta)$ önsel dağılımı $g_0 = g(\theta_0) = P(\boldsymbol{\theta} = \theta_0)$ ve $g_1 = g(\theta_1) = P(\boldsymbol{\theta} = \theta_1)$ ile gösterilecektir.

Böylelikle X'e ait marjinal olasılık fonksiyonu

$$\begin{aligned} P(x) = P(X = x) &= \sum_{i=0}^{1} P(X = x\,|\boldsymbol{\theta} = \theta_i\,)P(\boldsymbol{\theta} = \theta_i) \\ &= g_0 f_0(x) + g_1 f_1(x) \end{aligned}$$

ve sonsal dağılımlar da sırasıyla

$$h_0\,(\theta\,|x\,) = P(\boldsymbol{\theta} = \theta_0\,|X = x\,) = \frac{g_0 f_0(x)}{P(x)}$$

ve

$$h_1\left(\theta\,|x\,\right) = P(\boldsymbol{\theta} = \theta_1\,|X = x\,) = \frac{g_1 f_1(x)}{P(x)}$$

olarak yazılacaktır. Daha önceleri r tane doğa durumu var olduğunda kayıp fonksiyonu için tanımlanmış olan verilen $X = x$ gözlemi için verilen $d(X)$ karar fonksiyonuna ait

$$L_h(d,x) = \sum_{i=1}^{r} l(\theta_i, d(x))h(\theta_i\,|x)$$

beklenen sonsal kaybı ve her $X = x_j$ gözlemine ait beklenen sonsal kayıpları kullanılarak elde edilen Bayes kaybı

$$B(d) = \sum_{j=1}^{m} L_h(d, x_j)P(x_j)$$

yalnızca iki doğa durumunun olduğu ve pişmanlık fonksiyonu kullanılarak test istatistikleri için yeniden düzenlenebilirler. Test istatistikleri için beklenen sonsal pişmanlığı gösterimi biraz değişecektir.

$h(\theta\,|x\,)$ sonsal dağılımı altında verilen $T(X) = t(X)$ test istatistiği test istatistiğinin belirlediği C kritik bölgesi için $L_h(t,x)$ gösteriminde verilen $t(X)$ için $X = x$ gözlemi yapıldığında ya A eylemi yapılacak ya da B eylemi yapılacaktır, eylem sonuçları rasgele değişkenler olarak sırasıyla ya 0 ya da 1 değerini alacaktır. Bu halde $L_h(t,x)$ gösteriminde t yerine C kritik bölgesi kullanılacak, $t(X)$'in aldığı değer yapılan eyleme göre h yerine alt takı olarak 0 ya da 1 olarak kullanılacaktır. Verilen $X = x$ gözlemi için $T(X)$ test istatistiği veya belirmiş olduğu C kritik bölgesi için A ve B eylemleri yapılması halinde beklenen sonsal pişmanlıklar sırasıyla $L_0(C,x)$ ve $L_1(C,x)$ olarak gösterilecektir.

Kayıp fonksiyonu yerine pişmanlık fonksiyonu kullanıldığında beklenen sonsal piş- manlık verilen bir Ckritik bölgesi için $X = x$ gözlemi yapıldığında A eylemine yapılırsa (H_0 kabul edilirse)

$$
\begin{aligned}
L_0(C,x) &= \sum_{i=0}^{1} r(\theta_i, A) h(\theta_i \,|x\,) \\
&= r\,(\theta_0, A)\, h_0 + r\,(\theta_1, A)\, h_1 \\
&= 0 \times h_0 + a h_1 \\
&= \frac{a g_1 f_1(x)}{P(x)}
\end{aligned}
$$

dır. Benzer olarak $X = x$ gözlemi yapıldığında B eylemine karar verilirse (H_1 kabul edildiğinde) beklenen sonsal pişmanlık

$$
\begin{aligned}
L_1(C,x) &= \sum_{i=0}^{1} r(\theta_i, B) h(\theta_i \,|x\,) \\
&= r\,(\theta_0, B)\, h_0 + r\,(\theta_1, B)\, h_1 \\
&= b \times h_0 + 0 \times h_1 \\
&= \frac{b g_0 f_0(x)}{P(x)}
\end{aligned}
$$

dır.

Verilen her $X = x$ gözlemi için **beklenen sonsal pişmanlıklara bakılarak** hangi eyleme karar verildiğinde beklenen pişmanlığın daha az olacağı belirlenebilir. A ya da B eylemlerinden hangisinin sonsal beklenen pişmanlığı küçükse yapılan gözlem için Bayes eylemi olacaktır: $L_0(C,x) > L_1(C,x)$ ise H_0 reddedilir, $L_1(C,x) > L_0(C,x)$ ise H_0 kabul edilir $L_1(C,x) = L_0(C,x)$ olması halinde hangi eylemin yapılacağı karar vericici açısından önemli değildir. O halde $L_0(C,x) > L_1(C,x)$ olması daha açık yazılırsa

$$\frac{a g_1 f_1(x)}{P(x)} > \frac{b g_0 f_0(x)}{P(x)}$$

olacak bu eşitsizlik sabitler bir tarafta, $X = x$ gözlemine bağlı olanlar diğer tarafta olacak şekilde yeniden düzenlenirse $f_0(x)/f_1(x) < a g_1 / b g_0$ olarak ifade edilebilir. Eşitsizliğin sağ tarafı bir sabit olacaktır, bu sabit K ile gösterilsin. Bu eşitsizlikle $f_0(X)/f_1(X)$ istatistiği ile $f_0(X)/f_1(X) < K$ olduğunda H_0'ın reddedilmesi karar kuralı, test istatistiği belirlenmiş olur. Böylece karar kuralını sağlayan $X = x$ gözlemlerinin kümesi, kritik küme

$$C = \{x_i : f_0(x_i)/f_1(x_i) < K\}$$

olarak belirlenir. Oluşturulan karar kuralı bir Bayes test istatistiğidir, bu test istatistiği için $\Lambda(X) = f_0(X)/f_1(X) < K$ gösterimi kullanılacaktır.

Tanım. $\Lambda(X)$ oranı **olabilirlik oranı**, $\Lambda(X) < K$ test istatistiği de **olabilirlik oranı test istatistiği** olarak adlandırılır.

O halde **Bayes testleri olabilirlik oran testleridir**, bu nedenle de birkaç özel durum dışında, **kabul edilebilirlik** özelliğine sahiptir.

İST 304 İstatistik Karar Kuramı ve Yöntemleri **Hafta XIV**

Ders 2: Olabilirlik Oranı ve Bayes Test İstatistiği

Dersi anlatan: İhsan Karabulut *Notları yazan: İhsan Karabulut*

Örnek. $H_0 : \theta = \theta_0$ basit hipotezi $H_1 : \theta = \theta_1$ basit hipotezine karşı test edilecektir. Bu amaçla belirli bir örneklem çapına sahip örnek çekimi yapılmış, örnekleme ait X istatistiğinin alabileceği değerler ve bu değerleri alma olasılıkları her iki hipotez altında $f_0(x) = P_{\theta_0}(X = x)$ ve $f_1(x) = P_{\theta_1}(X = x)$ aşağıdaki gibi verilmiştir. Bu tablonun son sütunda da ile Λ istatistiğinin alabileceği değerler verilmiştir.

Not. Hipotez testleri sadece parametre değerlerine ilişkin değildir. Örneğin dağılıma uygunluk, iki yığın dağılımının aynı dağılımlı oluşları,vb. istatistiksel hipotezlerin testi söz konusu olabilir. Bu örnekte $X = x_4$ ve $X = x_6$ değerlerinin sırasıyla θ_0 ve θ_1 doğa durumlarında 0 olasılıklı oldukları görülüyor. Aynı dağılım ailesinden olup bu değerleri alma olasılıklarının 0 olması da söz konusu olmakla beraber, burada bu olasılıkların çok küçük olasılık değerleri olduğu da düşünülebilir. Bu nedenle bu olasılıkların sıfıra çok yakın oldukları düşünülüp $\Lambda\,(x_6) = \infty$ olarak tanımlanmıştır.

Pişmanlık fonksiyonu tablosu aşağıdaki gibidir:

$r(\theta, a)$

	A	B
$H_0 : \theta = \theta_0$	0	1
$H_1 : \theta = \theta_1$	1	0

Rasgele değişkenin alacağı gözlem değerlerinden $\emptyset$ dahil olmak üzere $2^6 = 64$ alt küme belirlenebilir, bu aynı zamanda 64 sade farklı test istatistiği oluşturulabilir. Bu testlerin tümünün dikkate alınarak her biri için $(R(\theta_0, C), R(\theta_1, C))$ risk vektörü-risk fonksiyonu değerleri- kullanılarak tüm sade ya da

$X = x$	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$\Lambda(x) = \frac{f_0(x)}{f_1(x)}$
x_1	0.1	0.4	1/4
x_2	0.3	0.1	3
x_3	0.2	0.1	2
x_4	0	0.2	0
x_5	0.1	0.2	1/2
x_6	0.3	0	∞

Tablo 2.1: Örnek probleme ait $\Lambda(X)$ olabilirlik oranları

karma test istatistiklerine ilişkin konveks kabuk elde edilip minimaks veya Bayes test istatistikleri grafik yoluyla belirlenebilir. Bunun yerine konveks kabuğun sadece kabul edilebilir test istatistiklerine ilişkin bölgesi ile de yetinilebilir. Bunun için aşağıdaki yol izlenecektir.

$X = x$ değerleri için olabilirlik oranları hesaplanır ve küçükten büyüğe doğru sırala- nır. Örnek için $\Lambda(x)$ değerleri aşağıdaki gibi sıralanmıştır:

$X = x$	x_4	x_1	x_5	x_3	x_2	x_6
$\Lambda(x)$	0	1/4	1/2	2	3	∞

$X = x_4$ gözlem değerinin nn küçük olabilirlik oranına sahip olduğu görülmektedir.

Buradaki tablodan $\Lambda(x)$ in büyüyen değerlerine göre 7 tane kritik bölge belirlenebilir. Bunlar aşağıdaki tabloda yazılmıştır. örneğin $\Lambda(X) < 0$ için kritik küme aşağıda $C_7 = \emptyset$ olarak verilmiştir. $\Lambda(X) < \infty$ test istatistiği için $C_1 = \{x_4, x_1, x_5, x_3, x_2, x_6\}$, $\Lambda(X) < 1/2$ test istatistiği için ise $C_5 = \{x_4, x_1\}$ olduğu görülecektir. Kritik kümelere verilecek numaralandırmanın hiçbir kuralı yoktur, önemi de yoktur. Belirlenen 7 kritik bölge dışında olanlar dikkate alınmamıştır. Örneğin, $1/4 < K < 1/2$ olan K sabiti seçildiğinde test istatistiği, yada aynı işleve sahip kritik küme değişmeyecektir; bu aralıkta ter alan $K = 2/5$ ile oluşturulan $\Lambda(X) < 2/5$ veya $K = 1/3$ ile oluşturulan $\Lambda(X) < 1/3$ test sonucu verilen kararlar ve test istatistiklerine ilişkin kritik bölgeler aynı kalacaklardır.

Pişmanlık fonksiyonu tablosu değerleri $a = b = 1$ olduğundan herhangi bir C_i kritik bölgesi (ya

Kritik Bölge	Kritik Bölgenin Elemanları	$R(\theta_0, C_i)$	$R(\theta_0, C_i)$
C_1	$x_4, x_1, x_5, x_3, x_2, x_6$	1	0
C_2	x_4, x_1, x_5, x_3, x_2	0.7	0
C_3	x_4, x_1, x_5, x_3	0.4	0.1
C_4	x_4, x_1, x_5	0.2	0.2
C_5	x_4, x_1	0.1	0.4
C_6	x_4	0	0.8
C_7	$\emptyset$	0	1

Tablo 2.2: Kabul edilebilir testlere ilişkin kritik bölgeler ve risk fonksiyonu değerleri.

da test istatistiği) için risk fonksiyonu değerleri $R(\theta_0, C_i) = \alpha_i$ ve $R(\theta_0, C_i) = \beta_i$ sırasıyla $I.tip$ ve $II.tip$ hatalarına eşit olacaktır:

$$R(\theta, C_i) = \begin{cases} \alpha_i & , H_0 : \theta = \theta_0 \text{ doğru ise} \\ \beta_i & , H_1 : \theta = \theta_1 \text{ doğru ise} \end{cases}$$

dır. C_4 kritik bölgesinin ya da denk olarak $\Lambda(X) < 2$ ise H_0 hipotezinin reddedildiği test istatistiğine ait $I.tip$ ve $II.tip$ hataları α_4 ve β_4 örnek olarak aşağıda hesaplanmıştır.

H_0 doğru olduğunda H_0hipotezinin red edilmesi olasılığı α_4 bir gözlemin C_4 kritik bölgesinde yer alması olasılığı ile aynıdır. $A_4 = \{X = x_4\}$, $A_1 = \{X = x_1\}$ ve $A_5 = \{X = x_5\}$ basit olayları gösteren ayrık kümeler olmak üzere $C_4 = A_4 \bigcup A_1 \bigcup A_5$ olarak da yazılabilir. Böylece söz konusu olasılık

$$\begin{aligned}
\alpha_4 &= P(X \in C_4 \,|H_0 \text{ doğru}) \\
&= P(X \in C_4 \,|\boldsymbol{\theta} = \theta_0\,) \\
&= P(X = x_1 \,|\boldsymbol{\theta} = \theta_0\,) + P(X = x_4 \,|\boldsymbol{\theta} = \theta_0\,) + P(X = x_5 \,|\boldsymbol{\theta} = \theta_0\,) \\
&= 0.1 + 0.0 + 0.1 \\
&= 0.2
\end{aligned}$$

olarak hesaplanmış olur.

H_1 doğru olduğunda (H_0 doğru olmadığında) H_0 hipotezinin reddedilememesi olasılığı β_4 benzer olarak

$$\begin{aligned}
\beta_4 &= 1 - P(X \in C_4 \,|H_1 \quad \text{dogru}) \\
&= 1 - P(X \in C_4 \,|\boldsymbol{\theta} = \theta_1\,) \\
&= 1 - (P(X = x_1 \,|\boldsymbol{\theta} = \theta_1\,) + P(X = x_4 \,|\boldsymbol{\theta} = \theta_1\,) + P(X = x_5 \,|\boldsymbol{\theta} = \theta_1\,)) \\
&= 1 - (0.4 + 0.2 + 0.2) \\
&= 0.2
\end{aligned}$$

hesaplanacaklardır . α_4, β_4 hataları risk fonksiyonu değerleri $(R_1, R_2) = (0.2, 0.2)$ dir. Diğer kritik bölgelerin α_i, β_i hataları yine risk fonksiyonu değerleri olarak Tablo'da verilmiştir.

Verilen problemle ilgili olarak $2^6 = 64$ tane sade karar kuralı olarak tanımlanan test istatistiği vardır. Bunlardan birinin tarif edilmesi basit hipotezlerin testi için kullanılan test istatistiği ile herhangi bir karar verme probleminde kullanılan karar fonksiyonu arasında fark olmadığı konusunda ikna edici olacaktır.

Gösterimi kolaylaştırmak amacıyla H_0 hipotezini reddetmek olan B eylemi 1, "kabul" etmek olan A eylemi 0 ile gösterilsin. Test istatistiği yine bir karar fonksiyonu için kullanıldığı gibi d ile gösterilsin. d karar fonksiyonu $X = x$ gözlemine göre 0 ya da 1 değerini alan bir rasgele değişken olacaktır.

$$\begin{aligned}
&d(X) \to i, \ i = 0, 1 \\
&X = x \to \{0, 1\}, \quad x = x_1, x_2, \ldots, x_6
\end{aligned}$$

Örneğin $d(x_1) = 0, d(x_2) = 1,\ d(x_3) = 1,\ d(x_4) = 0,\ d(x_5) = 1,\ d(x_6) = 0$ tanımlana- bilecek 64 karar fonksiyonundan biridir. Bu fonksiyon alışılagelen gösterimle

$$d(X) = \begin{cases} 0 & , X = x_1 \\ 1 & , X = x_2 \\ 1 & , X = x_3 \\ 0 & , X = x_4 \\ 1 & , X = x_5 \\ 0 & , X = x_6 \end{cases}$$

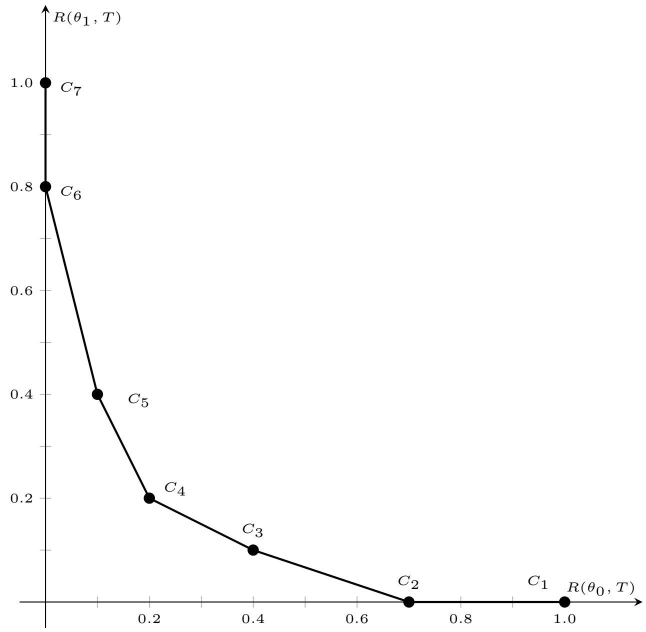
olarak yazılabilir. Bu karar fonksiyonu yukarıdaki C_4 kritik bölgesi ile belirlenmiş $\Lambda(X) < 2$ olduğunda H_0 hipotezinin reddedildiği test istatistiğine denk olan karar fonksiyonudur.

Not. Sade test istatistiklerinin herhangi bir karması da bir $p = (p_1, p_2, \cdots, p_{64})$ dağılımı kullanılarak elde edilebilir. Elde edilen test istatistiği bir karma ya da rasgele test istatistiği olacaktır. Özellikle kesikli değerler alan rasgele değişkenlerin dağılımlarına ait parametrelerin testinde istenilen α anlamlılık düzeyine sahip test istatistiği oluşturmak için rasgele test istatistikleri kullanmak özellikle örneklem çapı küçük olduğunda bir araç olarak öne çıkar.

$2^6 = 64$ tane karar fonksiyonu için risk fonksiyon değerleri (R_1, R_2) belirlenip bunların R^2'de oluşturduğu konveks kabuk elde edilebilir. Bununla birlikte hipotezlerin testi probleminde bu konveks kümeyi tümüyle elde etmek yerine yukarıdaki yol izlenerek sadece verilmiş bulunan **olabilirlik oran testleri** ile bu konveks kabuğun (çokgenin) kabul edilebilir testler (karar fonksiyonları) parçası çizilebilir, kabul edilebilir karar fonksiyonları parçası Şekil'de yer alan grafikteki gibidir.

Kabul edilebilir test istatistiklerinden biri minimaks ya da Bayes ilkelerinden biri kullanılarak seçilecektir.

Parametrenin H_0 hipotezinde belirtilen θ_0 değerini alması olasılığı $g(\theta_0) = 0.5$ ve H_1 hipotezinde belirtilen θ_1 değerini alması olasılığı $g(\theta_1) = 0.5$ olarak önsel dağılım belirlenmiş olsun. Herhangi bir C kritik bölgesine ait riskler $R_1 = R(\theta_0, C)$, ve $R_2 = R(\theta_1, C)$ olarak gösterilirse söz konusu



Şekil 2.1: Test istatistiklerine ilişkin risk fonksiyonu değerleri (R_1, R_2)'nin oluşturduğu konveks kabuğun kabul edilebilir olabilirlik oranı test istatistiklerinin yer aldığı parçası.

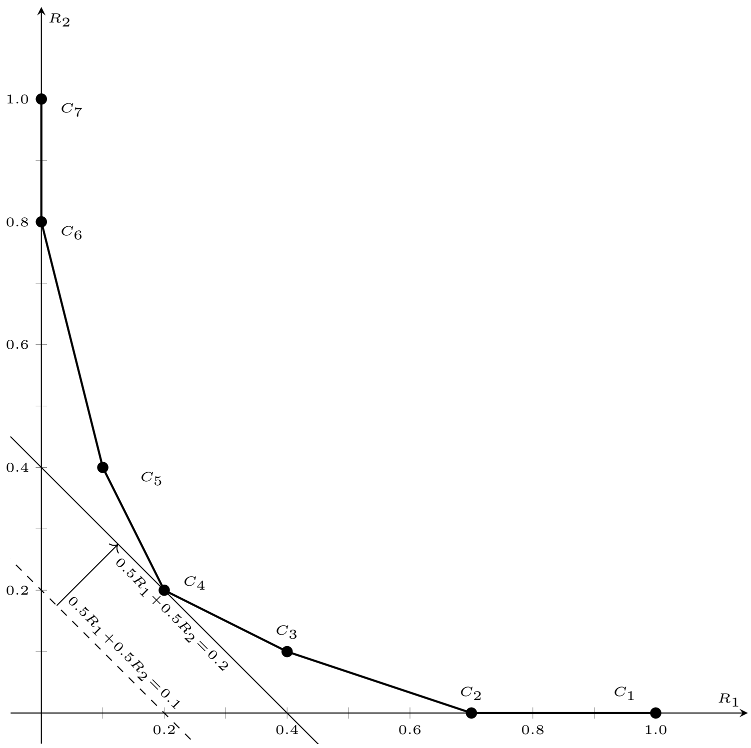
test istatistiğinin **Bayes pişmanlık riski**

$$\begin{aligned} B(p) &= g(\theta_0)R_1 + g(\theta_1)R_2 \\ &= 0.5 \times R_1 + 0.5 \times R_2 \end{aligned}$$

olacaktır. $0.5 \times R_1 + 0.5 \times R_2 = v$ doğrusu aşağıda Şekil' de yer alan grafikte ilk olarak $v = 0.1$ seçilerek çizilmiştir. Grafiğe bakılıp bu doğrunun konveks kümenin kabul edilebilir kesimine destek olacağı düşünülerek doğrunun yukarı doğru kaydırılması ile ilk kez C_4 kritik kümesine ait $(R_1, R_2) = (0.2, 0.2)$ noktasında konveks kümeye değeceği görülebilir. Söz konu kaydırılmış doğru $0.5 \times R_1 + 0.5 \times R_2 = 0.2$ doğrusu olacaktır.

O halde C_4 kritik bölgesi ile belirlenen $\Lambda(X) < 2$ test istatistiği verilen önsel dağılım altında Bayes test istatistiğidir ve Bayes pişmanlığı da 0.20'dir.

Aynı hipotez testi için minimaks test istatistiğinin de aynı test istatistiği olduğu Şekil'den görülmektedir.



Şekil 2.2: Önsel dağılım $g(\theta_0) = 0.5$, $g(\theta_1) = 0.5$ olduğunda Bayes testi $\Lambda(X) < 2$ veya ilgili kritik bölge C_4 olacaktır.

Soru. Yukarıda verilen hipotez testi örneğinde pişmanlık fonksiyonu ve önsel dağılım $g(\theta_0) = 1/3$,

$r(\theta, a)$	A	B
$H_0 : \theta = \theta_0$	0	2
$H_1 : \theta = \theta_1$	3	0

$g(\theta_1) = 2/3$ olarak verilmiş olsun. Bayes ve minimaks istatistiklerini elde ediniz ve pişmanlık değerlerini hesaplayınız.