KONU 13. SAÇILIM MATRİSİNİN ÖZELLİKLERİ

Teorem 13.1

$$a(-\lambda) = \overline{a(\lambda)},\ b(-\lambda) = \overline{b(\lambda)},\ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \tag{13.1}$$

eşitliklerini gösteriniz.

İspat.

$$f(x,-\lambda) = \overline{f(x,\lambda)},\ g(x,-\lambda) = \overline{g(x,\lambda)},\ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

eşitliklerini kullanalım. $a(\lambda)$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned}
a(-\lambda) &= \frac{1}{2i\lambda} W\left[f(x,-\lambda), g(x,-\lambda)\right] \\
&= \frac{1}{2i\lambda}\left[f(x,-\lambda)g_x(x,-\lambda) - f_x(x,-\lambda)g(x,-\lambda)\right] \\
&= \frac{1}{2i\lambda}\left[\overline{f(x,\lambda)g_x(x,\lambda)} - \overline{f_x(x,\lambda)g(x,\lambda)}\right] \\
&= \frac{1}{2i\lambda}\overline{W\left[f(x,\lambda), g(x,\lambda)\right]} \\
&= \overline{\left\{-\frac{1}{2i\lambda} W\left[f(x,\lambda), g(x,\lambda)\right]\right\}} \\
&= \overline{a(\lambda)}
\end{aligned}$$

elde edilir. $b(-\lambda) = \overline{b(\lambda)}$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ eşitliği benzer biçimde ispatlanır.

Teorem 13.2

$$|a(\lambda)|^2 = 1 + |b(\lambda)|^2,\ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

olduğunu ispatlayınız.

İspat. $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için (12.1) ve (13.1) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
-2i\lambda &= W\left[f(x,\lambda), f(x,-\lambda)\right] \\
&= W\left[b(\lambda)g(x,\lambda) + a(\lambda)g(x,-\lambda), b(-\lambda)g(x,-\lambda) + a(-\lambda)g(x,\lambda)\right] \\
&= W\left[b(\lambda)g(x,\lambda) + a(\lambda)g(x,-\lambda), \overline{b(\lambda)}g(x,-\lambda) + \overline{a(\lambda)}g(x,\lambda)\right] \\
&= |b(\lambda)|^2 W\left[g(x,\lambda), g(x,-\lambda)\right] + |a(\lambda)|^2 W\left[g(x,-\lambda), g(x,\lambda)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuncu eşitlikten ise

$$-2i\lambda = 2i\lambda\,|b(\lambda)|^2 - 2i\lambda\,|a(\lambda)|^2,\ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

çıkar. Buradan

$$|a(\lambda)|^2 = 1 + |b(\lambda)|^2,\ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

eşitliği elde edilir.

Alıştırmalar.

1)

$$b(-\lambda) = \overline{b(\lambda)}, \ \lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

eşitliğini elde ediniz.

2) $a(\lambda)$ fonksiyonunun açık üst yarıdüzleme (yani $\mathbb{C}_+$ ya) analitik devama sahip olduğunu gösteriniz ve analitik devam sonucunda

$$a(\lambda) = -\frac{1}{2i\lambda} W\left[f(x,\lambda), g(x,\lambda)\right], \ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \backslash \{0\}$$

eşitliğinin gerçeklendiğini gösteriniz.

3) σ_d ile (9.1) Sturm-Liouville denkleminin özdeğerler kümesi gösterilsin.

$$\sigma_d = \left\{\mu : \mu = \lambda^2, \ \lambda \in \mathbb{C}_+, \ a(\lambda) = 0\right\}$$

olduğunu ispatlayınız.

4) $\sigma_d \subset \mathbb{R}$ olduğunu gösteriniz.