KONU 14. SAÇILIM MATRİSİNİN ÖZELLİKLERİ II

Teorem 14.1 $a(\lambda)$ fonksiyonu için

$$a(\lambda) = 1 + \frac{\alpha}{2i\lambda} + \frac{1}{2i\lambda}\int_0^\infty \varphi(t)e^{i\lambda t}dt,\ \ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\} \tag{14.1}$$

gösterimi gerçeklenir, burada α reel sabit olup, φ fonksiyonu ise $L_1(0,\infty)$ uzayındandır.

İspat.

$$\begin{aligned}
-2i\lambda a(\lambda) &= W\left[f(x,\lambda), g(x,\lambda)\right] \\
&= f(x,\lambda)g_x(x,\lambda) - f_x(x,\lambda)g(x,\lambda) \\
&= f(0,\lambda)g_x(0,\lambda) - f_x(0,\lambda)g(0,\lambda) \\
&= \left[1 + \int_0^\infty A^+(0,t)e^{i\lambda t}dt\right]\left[-i\lambda + A^-(0,0) + \int_{-\infty}^0 A_x^-(0,t)e^{-i\lambda t}dt\right] \\
&\quad - \left[i\lambda - A^+(0,0) + \int_0^\infty A^+(0,t)e^{i\lambda t}dt\right]\left[1 + \int_{-\infty}^0 A^-(0,t)e^{-i\lambda t}dt\right] \\
&= \left[1 + \int_0^\infty A^+(0,t)e^{i\lambda t}dt\right]\left[-i\lambda + A^-(0,0) + \int_0^\infty A_x^-(0,-t)e^{i\lambda t}dt\right] \\
&\quad - \left[i\lambda - A^+(0,0) + \int_0^\infty A^+(0,t)e^{i\lambda t}dt\right]\left[1 + \int_0^\infty A^-(0,-t)e^{i\lambda t}dt\right] \\
&= -2i\lambda - \alpha - \int_0^\infty \varphi(t)e^{i\lambda t}dt,\ \ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\},\ \ \alpha \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

ve $\varphi \in L_1(0,\infty)$ elde edilir. Sonuncu eşitlikten ise

$$a(\lambda) = 1 + \frac{\alpha}{2i\lambda} + \frac{1}{2i\lambda}\int_0^\infty \varphi(t)e^{i\lambda t}dt,\ \ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}$$

bulunur.

Teorem 14.2 Aşağıdaki asimptotik eşitlikler gerçeklenir:

1) $a(\lambda) = 1 + O(\frac{1}{\lambda})$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}$, $|\lambda| \to \infty$

2) $\lambda a(\lambda) = O(1)$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$, $\lambda \to 0$

İspat.

$$2i\lambda\left[a(\lambda)-1\right]=\alpha+\int\limits_0^\infty \varphi(t)e^{i\lambda t}dt,\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}}_+\setminus\{0\} \tag{14.1}$$

eşitliğini kullanalım.

1) Önce $\lambda\in\mathbb{R}$ olsun. Fourier dönüşümleri için Riemann-Lebesgue lemmasına göre

$$\int\limits_0^\infty \varphi(t)e^{i\lambda t}dt=o(1),\ \lambda\in\mathbb{R},\ \lambda\to\pm\infty \tag{14.2}$$

bulunur. $\lambda\in\mathbb{C}_+$ olsun. $\varphi\in L_1(0,\infty)$ olduğundan

$$I=\int\limits_0^\infty \varphi(t)e^{i\lambda t}dt$$

integrali λ parametresine göre $\mathbb{C}_+$ da düzgün yakınsaktır. Bu nedenle de

$$\int\limits_0^\infty \varphi(t)e^{i\lambda t}dt=o(1),\ \lambda\in\mathbb{C}_+,\ |\lambda|\to\infty \tag{14.3}$$

olur. Her λ için (α sayısı λ dan bağımsızdır.)

$$\alpha=O(1) \tag{14.4}$$

olduğundan (14.2) – (14.4) eşitliklerini (14.1) de dikkate alarak

$$2i\lambda\left[a(\lambda)-1\right]=O(1)+o(1)=O(1),\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}}_+\setminus\{0\},\ |\lambda|\to\infty$$

elde edilir. Sonuncu eşitlikten ise

$$a(\lambda)=1+O(\frac{1}{\lambda}),\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}}_+\setminus\{0\},\ |\lambda|\to\infty$$

bulunur.

2)

$$\lambda a(\lambda)=\lambda+\frac{\alpha}{2i}+\frac{1}{2i}\int\limits_0^\infty \varphi(t)e^{i\lambda t}dt,\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}}_+$$

eşitliğini kullanarak

$$\lambda a(\lambda)=O(1),\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}}_+,\ \lambda\to 0$$

elde edilir.

Alıştırmalar.

1) $\psi \in L_1(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$b(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{i\lambda t} dt, \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

olduğunu gösteriniz.

2)

$$b(\lambda) = o(\frac{1}{\lambda}), \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ \lambda \to \pm\infty,$$

$$\lambda b(\lambda) = O(1), \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda \to 0$$

asimptotik eşitliklerini ispatlayınız.