SAB 101 OLASILIK

DERS NOTLARI
Giriş

Prof.Dr. Fatih TANK

Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi
Sigortacılık ve Aktüerya Bilimleri Bölümü

Haftalık öğrenim kazanımları

1. Kümeler
2. Küme işlemleri
3. Sınıflar
4. Sigma cebiri
5. Borel sigma cebiri

Rastgelelik

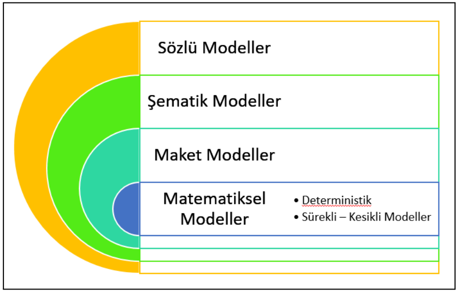
- İstatistik, rasgelelik içeren olaylar, süreçler, sistemler hakkında modeller kurmada, gözlemlere dayanarak bu modellerin geçerliliğini sınamada ve bu modellerden sonuç çıkarmada gerekli bazı bilgi ve yöntemleri sağlayan bir bilim dalıdır.
- Rasgele sözcüğü ile ilgili Türk Dil Kurumu web sayfasındaki Güncel Türkçe Sözlük'te,
    1. (sıfat) Gelişigüzel
       "Bu özü susma ile tanımlamak pek kişisel, rastgele bir yargı kurmak oluyor." - N. Uygur
    2. (zarf) (ra'stgele) Seçmeden, iyisini kötüsünü ayırmadan, gelişigüzel, lalettayin
       "Asılanları deniz kenarında, rastgele atıldıkları çukurlar içinde kumluğa gömüyorlar." - N. F. Kısakürek
- Türk Dil Kurumu Yayınları (1971) İngilizce-Türkçe Sözlükte "random" sözcüğünün Türkçe karsılığı olarak "rasgele, gelisigüzel" yazılıdır.
- Halk arasında



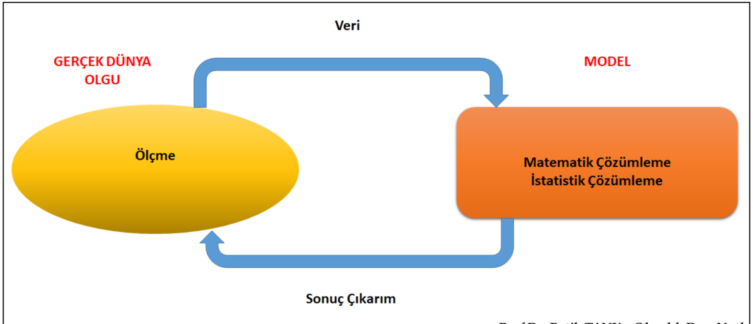
- Rastgeleliğin ölçülmesi gerekmektedir.
    - Olasılık ölçüsü bu ise yaramaktadır.
    - İstatistik, rasgelelik ortamında hesap yapabilmemizi sağlamaktadır

Modelleme

- İnsanoğlu aklımız ile gerçek dünyadaki olguları anlamaya ve anlatmaya çalısır.
- Bu anlama anlatma işine modelleme ve anlatımın kendisine de model denir.
- Modellemede, dilden sonra, aklımızın kullandığı ifade araçlarından en önde gelenleri matematik ve istatistiktir.

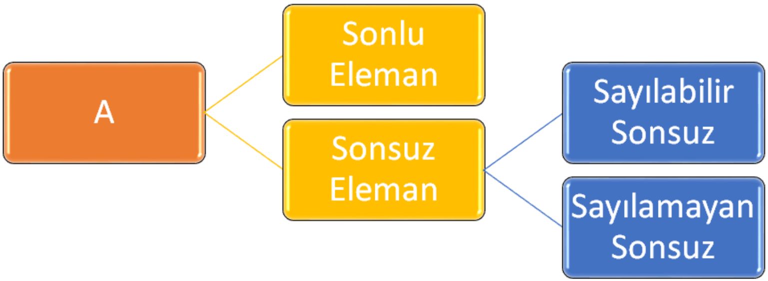


- Model, gerçek dünyadaki bir olgunun ilgili olduğu bilim sahasının (fizik, kimya, biyoloji, jeoloji, astronomi, ekonomi, sosyoloji,...) kavram ve kanunlarına bağlı olarak ifade edilmesidir.
- Model gerçek dünyadaki bir olgunun bir anlatımıdır, bir tasviridir.



Kümeler Cebiri

- Üzerinde çalışacağımız kümeyi "Ω" ile göstereceğiz ve $\Omega \neq \varnothing$ kabul edeceğiz
  $\Omega = \{\omega : \omega \in \Omega\}$
  $A \subset \Omega \Rightarrow A = \{\omega \in \Omega; \omega \in \Omega\}$



Tanım (Sonlu-Sonsuz Kümeler)

Hiçbir özalt kümesiyle birebir eşlenemeyen bir kümee **sonlu elemanlı küme** denir. Aksi halde **sonlu elemanlı küme** denir.

Tanım

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesiyle birebir eşlenebilen kümeye **sayılabilir sonsuz elemanlı küme** denir. Aksi halde **sayılamayan sonsuz elemanlı küme** denir.

- **Kesişim**
  $A, B.C \in \Omega$ olsun $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A, \omega \in B\}$
  - $A \cap B = B \cap A$
  - $A \cap \varnothing = \varnothing$
  - $A \cap \Omega = A$
  - $A \cap B \subset A$
  - $A \cap B \subset B$
  - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
- **Bileşim**
  $A, B, C \in \Omega$ olsun $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ veya } \omega \in B\}$
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cup \varnothing = A$
  - $A \cup \Omega = \Omega$
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
- **Fark**
  $A, B, C \in \Omega$ olsun $A \backslash B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ ve } \omega \notin B\}$
  - $A^C = A' = \overline{A} = \{\omega \in \Omega, \omega \notin A\}$
  - $A \cup \overline{A} = \Omega$
  - $A \cap \overline{A} = \varnothing$
  - $(A')' = A$
  - $(A \cup B)' = A' \cap B'$
  - $(A \cap B)' = A' \cup \ddot{o}B'$

Sınıf

Tanım (Sınıf)

Ω nın alt kümelerinden oluşan bir kümeye **sınıf** denir

Örnek

$\Omega = \{1,2,3,4\}$ olmak üzere
$A_1 = \{\varnothing, \{1\}, \{1,4\}\} \Longrightarrow$ Sınıf
$A_2 = \{1\} \Longrightarrow$ Sınıf değil
$A_2 = \{\{1\}\} \Longrightarrow$ Sınıf

Tanım (Kuvvet Kümesi)

$\Omega \neq \varnothing$ olmak üzere

$$P(\Omega) = \{A : A \subset \Omega\}$$

ile verilen $P(\Omega)$ sınıfına Ω 'nın **kuvvet kümesi** denir

Örnek

$\Omega = \{1,2,3\}$ olmak üzere
$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \Omega$
$P(\Omega) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \Omega\}$

Cebir

Tanım (Cebir)

$\Omega \neq \varnothing$ ve U Ω'da bir sınıf olmak üzere

1. $\Omega \in U$
2. $\forall A \in U$ için $\overline{A} \in U$
3. $\forall A, B \in U$ için $A \cup B \in U$

şartlarını sağlayan U sınıfına Ω'da bir cebir denir.

Sigma Cebir

Tanım (σ-Cebir)

$\Omega \neq \varnothing$ ve U Ω'da bir sınıf olmak üzere

1. $\Omega \in U$
2. $\forall A \in U$ için $\overline{A} \in U$
3. U sınıfından alınan $A_1, A_2, \ldots$ kümeleri için

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in U$$

şartlarını sağlayan U sınıfına Ω'da bir σ-cebir denir.

Sigma Cebir

Sigma cebirin matematiksel özellikleri

- U Ω'da bir σ-cebir olsun.

  a. $\varnothing \in U$
  b. $\forall A, B \in U$ için $A \cup B \in U$
  c. $\forall A, B \in U$ için $A \cap B \in U$
  d. $\forall A, B \in U$ için $A \setminus B \in U$
  e. $\forall A_1, A_2, ..., A_n \in U$ için $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in U$
  f. $\forall A_1, A_2, ..., A_n \in U$ için $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in U$
  g. U'dn oluşan her $A_1, A_2, ...$ kuvvetleri için $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in U$

Borel Cebiri

Tanım

$\Omega = \mathbb{R}$ olmak üzere, $\mathbb{R}$ üzerinde

$$A = \{(a,b) : a < b \text{ ve } a,b \in \mathbb{R}\}$$

ile tanımlanan A sınıfı σ- cebir olmamaktadır. Bu sınıf bir borel σ-cebiri olmaktadır.