SAB 101 OLASILIK
DERS NOTLARI

Prof.Dr. Fatih TANK

Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi
Sigortacılık ve Aktüerya Bilimleri Bölümü

Haftalık öğrenim kazanımları

Kesikli rasgele değişken için:

1. Beklenen değer
2. Varyans
3. Moment çıkaran fonsiyon

Beklenen Değer

Tanım (Beklenen Değer)

X kesikli rasgele değisken ve $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere,

$$E\left(g\left(X\right)\right)=\sum_{x\in D_X} g\left(x\right)f\left(x\right)$$

sayısına $g\left(X\right)$'in beklenen değeri denir.

Teorem

1. $\forall a\in\mathbb{R}$ *için* $E\left(a\right)=a$
2. $\forall a,b\in\mathbb{R}$ *için* $E\left(ag\left(x\right)+bh\left(x\right)\right)=aE\left(g\left(x\right)\right)+bE\left(h\left(x\right)\right)$

Kanıt.

1. $E(a)=a.1=a$
2.

$$\begin{aligned}E\left(ag\left(x\right)+bh\left(x\right)\right) &= \sum_x\left(ag\left(x\right)+bh\left(x\right)\right)P\left(X=x\right)\\ &= a\sum_x g\left(x\right)P\left(X=x\right)+b\sum_x h\left(x\right)P\left(X=x\right)\\ &= aE\left(g\left(x\right)\right)+bE\left(h\left(x\right)\right)\end{aligned}$$

$\square$

Sonuç

$\forall a,b\in\mathbb{R}$ *için* $E\left(aX+b\right)=aE\left(X\right)+b$

Momentler

Tanım

$a \in \mathbb{R}$ ve $n = 1, 2, ...$ olsun

1. $E(X^n)$ beklenen değerine X'in n. momenti adı verilir
2. $E(X-a)^n$ beklenen değerine X'in a'ya göre n. momenti denir
3. $E(X(X-1)...(X-n+1))$ beklenen değerine n. çarpımsal moment denir.

Tanım

X bir r.d. olmak üzere $h > 0$ için $E\left(e^{tX}\right)$ beklenen değeri $t \in (-h, h)$ değerlerinde mevcut ise

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right)$$

ile tanımlanan $M_X(t)$ fonksiyonuna X'in moment çıkaran fonksiyonu denir.

Teorem

Bir X rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu varsa

$$\left.\frac{d^n}{dt^n} M_X(t)\right|_{t=0} = E(X^n) \ , n = 1, 2, ...$$

olur.

Kanıt.

??? □

Varyans

Tanım

X r.d. varyansı

$$\boxed{Var\,(X) = E\left[(X - E\,(X))^2\right]}$$

biçiminde tanımlanır.

- X r.d. varyansı X'in beklenen değerine olan karesel uzaklığının X'in olasılık dağılımına göre ağırlıklandırılmasıyla elde edilen değerdir.
- Beklenen değer etrafında yayılım hakkında bilgi verir.

Sonuç

$$\begin{aligned} Var\,(X) &= E\left[(X - E\,(X))^2\right] = E\left[X^2 - 2XE\,(X) + (E\,(X))^2\right] \\ &= E\left(X^2\right) - 2E\,(X)\,E\,(X) + (E\,(X))^2 \\ &= E\left(X^2\right) - (E\,(X))^2 \end{aligned}$$

Teorem

1. $\forall a \in \mathbb{R}$ *için* $Var\,(a) = 0$
2. $\forall a \in \mathbb{R}$ *için* $Var\,(aX + b) = a^2 Var\,(X)$

Tanım

$\sqrt{Var\,(X)}$ değerine X'in standart sapması denir.

Örnekler

Örnek

Bir madeni paranın ard arda 4 kez atılması deneyinde ortalama kaç tura gelir?
X: 4 atışta gelen tura sayısı dolayısıyla D_X: $\{0,1,2,3,4\}$

X	0	1	2	3	4
$f(x) = P(X = x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^{4} x f(x) = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} \\
&= \frac{32}{16} = 2 \\
E\left(X^2\right) &= \sum_{x=0}^{4} x^2 f(x) = 0^2 \cdot \frac{1}{16} + 1^2 \cdot \frac{4}{16} + 2^2 \cdot \frac{6}{16} + 3^2 \cdot \frac{4}{16} + 4^2 \cdot \frac{1}{16} \\
&= \frac{0+4+24+36+16}{16} = \frac{80}{16} = 5 \\
Var(X) &= E\left(X^2\right) - (E(X))^2 \\
&= 5 - 2^2 = 1
\end{aligned}
$$

Örnekler

Örnek

Bir X r.d. olasılık fonksiyonu

X	-1	0	1
$f(x) = P(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{4} xf(x) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0 \\ E\left(X^2\right) &= \sum_{x=0}^{4} x^2 f(x) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{3} + 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ Var(X) &= E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \frac{2}{3} - 0^2 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Örnekler

Örnek

Bir X r.d. olasılık fonksiyonu

X	-1	0	1
$f(x) = P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{4} xf(x) = -1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$E\left(X^2\right) = \sum_{x=0}^{4} x^2 f(x) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{2}{6} + 1^2 \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{17}{36}$$