* **5 ile bölünebilme kuralı:** Herhangi bir doğal sayının, birler basamağındaki rakamı 0 veya 5 olan sayılar, 5 ile tam bölünebilir.

* **8 ile bölünebilme kuralı:** Herhangi bir doğal sayının, son üç basamağı 8 in katı veya 000 olan sayılar, 8 ile tam bölünebilir.

* **9 ile bölünebilme kuralı:** Herhangi bir doğal sayının, rakamlarının toplamı 9 veya 9 un katı olan sayılar, 9 ile tam bölünebilir.

* **11 ile bölünebilme kuralı:** Herhangi bir doğal sayının, basamaklarındaki rakamları, sağdan sola doğru birer basamak atlayarak, sayı değerlerini toplayalım. Bu toplamdan arada kalan basamaklardaki rakamların sayı değerleri toplamını çıkaralım. Fark sıfır (0) veya 11 in katı ise bu sayı 11 ile tam bölünebilir.

* Farklı iki sayı ile ayrı ayrı tam bölünebilen bir doğal sayı, bu asal sayıların çarpımı ile de tam bölünebilir.

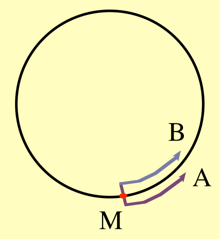
* İki ya da daha çok doğal sayının herbirini tam bölen en büyük sayma sayısına, bu sayıların en büyük ortak böleni denir. (EBOB) şeklinde yazılır.

* İki ya da daha çok doğal sayının ortak katlarından en küçüğüne, bu sayıların en küçük ortak katı denir. (EKOK) şeklinde yazılabilir.

* a ve b doğal sayıları verilsin. $a + c = b$ olacak şekilde bir $c \in N^+$ varsa, a sayısı b sayısından küçüktür denir. $a < b$ şeklinde yazılır.

ALIŞTIRMALAR

1. İki basamaklı bir doğal sayının rakamları yer değiştirildiğinde sayı 54 azalıyor. Bu sayının rakamları farkı kaç olur?
2. "aaa" üç basamaklı sayısı, hangi sayıya daima tam olarak bölünebilir?
3. **"1234a"** beş basamaklı sayısının 6 ile tam bölünebilmesi için "a" yerine hangi rakamlar gelmelidir?
4. 64372 sayısının 11 ile tam olarak bölünüp, bölünemeyeceğini bölme işlemi yapmadan bulunuz.
5. 1 den 1000 e kadar (1000 dahil) olan doğal sayılardan kaç tanesi 2 veya 3 ile tam olarak bölünebilir?
6. "120" sayısını bölebilen, kaç tane doğal sayı vardır?
7. Boyutları 4,2 m ve 3, 8 m olan bir odanın tabanına, kare biçiminde fayanslar döşenecektir. Fayansların birer kenarının uzunluğu, **en fazla** kaç cm olmalıdır?
8. Ali bilyelerini 6 lı kümelere ayırdığında, 5 bilye artıyor. 8 li kümelere ayırdığında, 7 bilye artıyor. 9 lu kümelere ayırdığında, 8 bilye artıyor. Buna göre, Ali'nin **en az** kaç bilyesi vardır?
9. Çembersel bir yolu A hareketlisi 9 dakikada, B hareketlisi 12 dakikada gidiyor. Bu iki hareketli çembersel yol üzerindeki bir M noktasında, aynı anda ve ayrı yönde harekete başlıyor. Hareketliler, harekete başladıkları andan t dakika sonra M noktasında, ilk kez birlikte geçtiklerine göre, t zamanı bulunuz.



10. Bir öğrenci defterine üçgen ve dörtgen çizmektedir. Hepsi 27 tane olan bu şekillerin, köşelerinin sayısı 92 tane olduğuna göre, kaç tane dörtgen çizmiştir?

2. TAM SAYILAR

a. Tanım

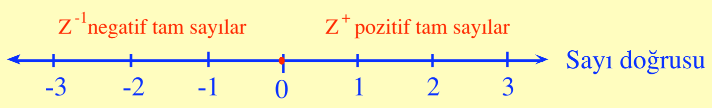
Doğal sayıların birçok problemin çözümünde yetersiz kaldığını görürüz. Bilim insanları, doğal sayılarla çözülemeyen problemleri çözebilmek için sayıları geliştirdiler. Doğal sayıları da kapsayacak şekilde, çıkarma işlemine göre kapalı olan, toplama işlemine göre her elemanın tersi bulunan, daha geniş bir küme tanımladılar. Bu kümeye, tam sayılar kümesi denir. Z ile gösterilir.

$Z^- = \{ ..., -3, -2, -1\}$ kümesine, negatif tam sayılar kümesi,

$Z^+ = \{1, 2, 3, ...\}$ kümesine, pozitif tam sayılar kümesi denir.

Buna göre, $Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+ = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ dir.

Tam sayılar kümesini, sayı ekseni üzerinde gösterelim.



Çizilen sayı doğrusunda, sıfırın sağında yer alan sayılar, pozitif tam sayılar kümesinin elemanları, sıfırın solunda yer alan sayılar, negatif tam sayılar kümesinin elemanlarıdır.

Böylece, $Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$ olur.

ÖRNEK 1.23
Doğal sayılar kümesinde, $x + 2 = 5$ ve $x + 5 = 2$ denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.

$x + 2 = 5$ denkleminin doğal sayılarla çözüm kümesi, $Ç = \{3\}$ tür.
$x + 5 = 2$ denkleminin doğal sayılarda çözüm kümesi, $Ç = \{ \quad \}$ dir.

ÖRNEK 1. 24
Tam sayılar kümesinde, $x + 3 = 1$ ve $x + 5 = 2$ denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.

$x + 3 = 1$ denkleminin tam sayılarda çözüm kümesi, $Ç = \{ -2\}$ dir.
$x + 5 = 2$ denkleminin tam sayılarda çözüm kümesi, $Ç = \{-3\}$ tür.

b. Tam Sayılar Kümesinde Toplama İşlemi

Aynı işaretli iki tam sayının toplamı bulunurken, sayılar toplanır. Bu sayının işareti, toplamın işareti olur.

Zıt işaretli iki tam sayı toplanırken, sayı değeri büyük olandan küçük olan çıkarılır. Büyük olanın işareti toplamın işareti olur.

Tam Sayılar Kümesinde Toplama İşleminin Özelikleri

I. Kapalılık Özeliği

Herhangi iki tam sayının toplamı yine bir tam sayıdır. Buna göre, tam sayılar kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

II. Değişme Özeliği

Tam sayılar kümesinde toplama işleminin değişme özeliği vardır.

Her $a, b \in Z$ için, $a + b = b + a$ olur.

III. Birleşme Özeliği

Tam sayılar kümesinde toplama işleminin birleşme özeliği vardır.

Her $a, b, c \in Z$ için, $(a + b) + c = a + (b + c)$ dir.

IV. Etkisiz (Birim) Eleman

Tam sayılar kümesinde, sıfır sayısı toplama işlemine göre etkisiz (Birim) elemanıdır.

Her $a \in Z$ için, $a + 0 = 0 + a = a$ olur.

V. Bir Elemanın Tersi

Tam sayılar kümesinde, toplama işlemine göre, her elemanın tersi vardır. Her $a \in Z$ için, $a + b = b + a = 0$ olacak şekilde bir $b \in Z$ vardır. Bu sayıya, toplama işlemine göre a nın tersi denir. - a ile gösterilir.

Sıfır hariç bir tam sayının toplama işlemine göre tersi, o sayının ters işaretlisidir. Sıfırın toplama işlemine göre tersi sıfırdır. Bu özelikleri birer örnekle açıklayalım.

ÖRNEK 1. 25

1. -7 ve + 4 tam sayılarının toplamı, $(-7) + (+4) = -3$ dür.

   -3 sayısı tam sayı olduğundan, toplama işlemine göre kapalıdır.

2. +8 ve -5 sayıları için, (+8) + (-5) = 3 ve (-5) + (+8) = 3 olduğundan, değişme özeliği vardır.
3. -1, 5 ve 8 tam sayıları için, [(-1) + (+5)] + (+8) = (+4) + (+8) = +12 ve (-1) + [(+5) + (+8)] = (-1) + (+13) = +12 olduğundan, birleşme özeliği vardır.
4. +6 ve 0 sayıları için, (+6) + (0) = +6 olduğundan, 0 etkisiz elemandır.
5. +4 ve -4 tam sayıları için, (+4) + (-4) = 0 olduğundan, +4 tam sayısı, -4 tam sayısının, toplama işlemine göre tersidir.

c. Tam Sayılar Kümesinde Çıkarma İşlemi

Tam sayılar kümesinde, bir tam sayı ile bir negatif tam sayının toplamı, birinciden ikincinin çıkarılması anlamında yeni bir işlem çıkarma işlemi olarak kabul edilir.

a, b $\in$ Z olmak üzere, a + (-b) toplamına, a ile b tam sayılarının farkı denir. Bu fark a - b biçiminde gösterilir. İki sayının farkını bulma işlemine de, çıkarma işlemi denir.

ÖRNEK 1. 26

1. 10 ve 4 tam sayılarında çıkarma işlemi, 10 - 4 = 6 dır.
2. -6 ve - 8 tam sayılarında çıkarma işlemi, -6 - (-8) = - 6 + 8 = 2 dir.
3. -11 ve 2 tam sayılarında çıkarma işlemi, -11 - (2) = - 11 - 2 = - 13 tür.

Tam Sayılar Kümesinde Çıkarma İşleminin Özelikleri

I. Kapalılık özeliği vardır.
II. Değişme özeliği yoktur.
III. Birleşme özeliği yoktur.
IV. Birim eleman özeliği yoktur.
V. Ters eleman özeliği yoktur.

Sizde tam sayılar kümesinde çıkarma işlemine ait çeşitli işlemler yapınız. Özelik - lerini örneklerle gösteriniz.

ç. Tam Sayılar Kümesinde Çarpma İşlemi

İki tam sayının çarpımı yapılırken, sayıların işaretine bakılmaksızın çarpılır. Çarpanlar aynı işaretli ise çarpımın işareti pozitif (+) olarak alınır. Çarpanlar zıt işaretli ise çarpımın işareti negatif (-) olarak alınır.

ÖRNEK 1. 27

1. $(+5) \cdot (+4) = +20$
2. $(-9) \cdot (-3) = +27$
3. $(+7) \cdot (-9) = -63$
4. $(-8) \cdot (+2) = -16$

Tam Sayılar Kümesinde Çarpma İşleminin Özelikleri

I. Kapalılık Özeliği

Herhangi iki tam sayının çarpımı yine bir tam sayıdır. Tam sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.

II. Değişme Özeliği

Tam sayılar kümesinde, çarpma işleminin değişme özeliği vardır.

Her $a, b \in Z$ için, $a \cdot b = b \cdot a$ olur.

III. Birleşme Özeliği

Tam sayılar kümesinde, çarpma işleminin birleşme özeliği vardır.

Her $a, b, c \in Z$ için, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ dir.

IV. Etkisiz (Birim) Eleman

Tam sayılar kümesinde +1, çarpma işlemine göre etkisiz (birim) elemanıdır.

Her $a \in Z$ için, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ dır.

V. Bir Elemanın Tersi

Tam sayılar kümesinde $a \neq \pm 1$ olmak üzere, her $a \in Z$ için, $a \cdot x = 1$ olacak şekilde $x \in Z$ yoktur.

O halde, tam sayılar kümesinde, çarpma işleminin ters eleman özeliği yoktur.

ÖRNEK 1. 28

Tam sayılar kümesinde, çarpma işleminin birleşme özeliğinin olduğunu gösterelim.

a = 3, b = -4, c = 5 ise, a . b = (3) . (-4) = - 12

(a . b) . c = (-12) . (5) = - 60 dır.

b. c = (-4) . (5) = - 20 ; a . (b. c) = 3. (-20) = - 60 dır.

O halde, (a . b) . c = a . (b . c) olduğundan,

[(3) . (-4)] . (5) = (3) . [(-4) . (5)]

- 60 = - 60 olur.

O halde, tam sayılar kümesinde çarpma işleminin bileşme özeliği vardır.

ÖRNEK 1.29

Tam sayılar kümesinde, çarpma işleminin ters eleman özeliğinin olmadığını gösterelim.

a = 9 ise 9 . x =1 den, $x = \frac{1}{9}$ olur. $\frac{1}{9} \notin Z$ olduğundan, 9 tam sayısının çarpma işlemine göre, tersi yoktur.

Siz de tam sayılar kümesinde, çarpma işlemine ait çeşitli işlemler yapınız. Bu tam sayılar kümesinde kapalılık, değişme ve etkisiz eleman özeliklerini örneklerle açıklayınız.

d. Tam Sayılar Kümesinde Bölme İşlemi

İki tamsayının bölümü yapılırken, sayıların işaretine bakılmaksızın bölme işlemi yapılır. Bölme işleminde aynı işaretli iki tamsayının bölümü pozitif, ters işaretli iki tam sayının bölümü negatif işaretlidir.

Tam Sayılar Kümesinde Bölme İşleminin Özelikleri

I. Kapalılık özeliği yoktur.

II. Değişme özeliği yoktur.

III. Birleşme özeliği yoktur.

IV. Birim eleman özeliği yoktur.

V. Ters eleman özeliği yoktur.

Sizde tam sayılar kümesinde, bölme işlemine ait çeşitli işlemler yapınız. Bu tam sayılar kümesinde kapalılık, değişme, birleşme özeliklerinin olmadığını örneklerle gösteriniz.

e. Kalanlı Bölme

Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, tam sayılar kümesinde, a tam sayısı, b tam sayısına bölündüğünde, bölüm c tam sayısı, kalan ise negatif olmayan bir k tam sayısıdır.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} b\,.\,c & c \\ \cline{1-1} k & \end{array}$$

Bölme eşitliği ise, $a = b\,.\,c + k$ dır.

Kalan k tam sayısı, $0 < k \leq |\, b\,|$ aralığındadır.

ÖRNEK 1. 30

39 Tam sayısını 4 tam sayısına bölerek, bölümü ve kalanı bulalım. Bölme eşitliğini yazalım.

$$\begin{array}{r|l} 39 & 4 \\ \cline{2-2} -\;36 & 9 \\ \cline{1-1} 03 & \end{array}$$

Bölüm : 9, Kalan: 3 tür.

Bölme eşitliği : $39 = 4\,.\,9 + 3$ olur.

f. Bir Tam Sayının Mutlak Değeri

a tam sayısının mutlak değeri, $|\, a\,|$ ile gösterilir.

a pozitif tam sayı ise, $|\, a\,| = a$ dır.

$a = 0$ ise, $|\, a\,| = |\, 0\,| = 0$ dır.

a negatif tam sayı ise, $|\, a\,| = -a$ dır.

ÖRNEK 1. 31

1. $|\, 6\,| = (\,6)$ dır.
2. $|-\,6| = -\,|-6| = 6$ dır.

g. Tek ve Çift Tam Sayılar

Tam sayılar kümesinin elemanlarından 2 nin katı olanların oluşturduğu küme, çift tam sayılar kümesidir. Bu küme, Ç = { ... - 4, -2, 0, 2, 4, ...} dür.

Tam sayılar kümesinde 2 nin katı olmayan elemanların oluşturduğu küme, tek tam sayılar kümesidir. Bu küme, T = { ..., -5, -3, -1, 0, 1, 3, 5, ...} dir.

n bir doğal sayı olmak üzere;

..., 2n - 2, 2n, 2n + 2, 2n + 4, ... sayıları ardışık çift sayılardır.

..., 2n - 3, 2n - 1, 2n + 1, 2n + 3, ... sayıları ardışık tek sayılardır.

Tek ve çift tam sayılarda yapılan işlemlerde;

1. İki çift sayının toplamı, çift sayıdır.
2. İki tek sayının toplamı, çift sayıdır.
3. Bir tek bir çift sayının toplamı, tek sayıdır.
4. İki tek sayının çarpımı, tek sayıdır.
5. İki çift sayının çarpımı, çift sayıdır.
6. Bir tek bir çift sayının çarpımı, çift sayıdır.
7. Bir tek sayının kuvveti, tek sayıdır.

ÖRNEK 1. 32

Ardışık 3 tek tam sayının toplamı 99 tür. Bu tam sayılardan büyük olanı bulalım.

Ardışık üç tek tam sayı; $2n + 1$, $2n + 3$ ve $2n + 5$ olsun.

$2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5 = 99$; $6n = 99 - 9$; $6n = 90$; $n = 15$ dir.

Büyük olan tam sayıyı bulmak için,

$2n + 5 = 2 (15) + 5 = 30 + 5 = 35$ olur.

ÖRNEK 1.33

Bir tek tam sayının karesinin de bir tek tam sayı olduğunu gösterelim.

a bir tek tam sayı olsun. O zaman, $a = 2n + 1$, $n \in Z$ dir.

$a^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n (n + 1) + 1 = 2 [2n (n + 1] + 1$ ve

$2n (n + 1) = m$ dersek, $m \in Z$ dir.

O halde, $a^2 = 2m + 1$ olur.

Burada, $m \in Z$ olduğundan, bir tek tam sayının karesi de bir tek tam sayıdır.