II. Kök dışındaki sayı üslü ise,

Kök dışındaki üslü bir sayı kök içine alınırken, bu sayının üssü, kökün derecesi ile çarpılır.

$m, n \in Z^+$ ve $a, b > 0$ ise, $a^m \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{mn} . b}$

ÖRNEK 1.124

1. $a^2 b \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a^{2.3}.a . b^3 . b} = \sqrt[3]{a^{6+1} . a^{3+1}} = \sqrt[3]{a^7 b^4}$

2. $x\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x^4 . x} = \sqrt[4]{x^{4+1}} = \sqrt[4]{x^5}$

f. Köklü Bir Sayının Kuvveti

$n \in Z^+$ ve $a > 0$ olmak üzere, $\sqrt[n]{a}$ gibi köklü bir sayının m inci kuvveti,

$(\sqrt[n]{a})^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{a} ... \sqrt[n]{a}}_{\text{m tane}} = \sqrt[n]{\underbrace{a . a . a ... a}_{\text{m tane}}} = \sqrt[n]{a^m}$ dir.

O halde, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ olur.

ÖRNEK 1.125

1. $(\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

2. $(\sqrt[4]{a^3})^3 = \sqrt[4]{a^9} = \sqrt[4]{a^8 . a} = a^2 \sqrt[4]{a}$

g. Köklü Bir Sayının Kökü

$m, n \in Z^+$ ve $a > 0$ olmak üzere, $\sqrt[n]{a}$ sayısının m inci dereceden kökü

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$ dir.

O halde, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ olur.

ÖRNEKLER 1.126

1. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[4.3]{2} = \sqrt[12]{2}$

2. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{3}}} = \sqrt[5.3.2]{3} = \sqrt[30]{3}$

h. Köklü Sayıların Bazı Özelikleri

1. $\sqrt[n]{a \,.\, \sqrt[n]{a^n \sqrt{a \,.\,.\,.}}} = \sqrt[n-1]{a}$

2. $\sqrt[n]{a : \sqrt[n]{a : \sqrt[n]{a \,.\,.\,.}}} = \sqrt[n+1]{a}$

3. $\sqrt{a\,.\,(a+1) + \sqrt{a\,.\,(a+1) + \sqrt{a\,.\,(a+1) + \sqrt{\,.\,.\,.}}}} = a + 1$

4. $\sqrt{a\,.\,(a+1) - \sqrt{a\,.\,(a+1) - \sqrt{a\,.\,(a+1) - \sqrt{\,.\,.\,.}}}} = a$

5. $\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{\,.\,.\,.}}}} = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$

6. $\sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{\,.\,.\,.}}}} = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$

Kökün kökü olarak ifade edilmiş birçok soruda bu kurallar kullanılarak, kolayca sonuç elde edilir.

ÖRNEKLER 1.127

1. $\sqrt[4]{8\sqrt[4]{8\sqrt[4]{8\,.\,.\,.}}} = \sqrt[4-1]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

2. $\sqrt{56 + \sqrt{56 + \sqrt{56 + \,.\,.\,.}}} = \sqrt{7\,.\,8 + \sqrt{7\,.\,8 + \sqrt{7\,.\,8 + \,.\,.\,.}}} = 8$

3. $\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}} + \,.\,.\,. = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4\,.\,3}}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$

ı. Köklü Sayıların Kök Kuvvetlerini Eşitleme

$\sqrt[m]{a^n}$ ve $\sqrt[p]{a^s}$ köklü sayılarının kök kuvvetleri eşitlenirken, kök kuvvetlerinin e.k.o.k bulunur. Kök kuvvetleri uygun sayılarla genişletilerek eşitlenir.

ÖRNEKLER 1.128

1. $\sqrt[3]{7}$ ve $\sqrt[5]{7}$ sayılarının kök kuvvetlerini eşitleyelim.

Kök kuvvetleri olan 3 ve 5 sayılarının e.k.o.k u 15 tir. Bu iki köklü sayının derecesini 15 e eşitleyebiliriz.

$\sqrt[3]{7} = \sqrt[3.5]{7^5} = \sqrt[15]{7^5}$ ve $\sqrt[4]{7} = \sqrt[5.3]{7^3} = \sqrt[15]{7^3}$ olur.

2. $\sqrt[6]{x^5}$ ve $\sqrt[4]{x^3}$ sayılarının kök kuvvetlerini eşitleyelim.

6 ve 4 sayılarının e.k.o.k 12 olduğundan iki köklü sayının derecesini 12 ye eşitleyebiliriz.

$\sqrt[3]{x^5} = \sqrt[2.6]{x^{5.2}} = \sqrt[12]{x^{10}}$ ve $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4.3]{x^{3.3}} = \sqrt[12]{x^9}$ olur.

i. Köklü Sayılarda Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Köklü sayıları toplayabilmek veya çıkarabilmek için, kök kuvvetleri ile kök içleri aynı olmalıdır. Bu şartlara uyan köklü sayıların katsayıları toplanır veya çıkarılır.

$x\sqrt[n]{a} + y\sqrt[n]{a} - z\sqrt[n]{a} = (x + y - z)\sqrt[n]{a}$ dır.

ÖRNEKLER 1.129

1. $8\sqrt[3]{7} + 2\sqrt[3]{7} - 4\sqrt[3]{7} = (3 + 2 - 4)\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{7}$

2. $8\sqrt[n]{x} + 5\sqrt[n]{x} - 9\sqrt[n]{x} = (8 + 5 - 9)\sqrt[n]{x} = 4\sqrt[n]{x}$

Burada, $n \in Z^+$, $n \geq 2$ ve $x \geq 0$ olmalıdır.

j. Köklü Sayılarda Çarpma İşlemi

Kök kuvvetleri aynı olan köklü sayıların çarpımı, bu sayıların çarpımının aynı kuvvetten köküne eşittir.

Kök kuvvetleri farklı olan köklü sayıları çarpmak için, önce kök kuvvetleri eşitlenir. Sonra çarpma yapılır.

$a, b \in R^+$ ve $n \in N^+$ ise $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ dir,

ÖRNEKLER 1.130

1. $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3\cdot 9} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

2. $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt{3} = \sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[2\cdot 2]{3^2} = \sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{3^2} = \sqrt[4]{5\cdot 9} = \sqrt[4]{45}$

k. Köklü Sayılarda Bölme İşlemi

Kök kuvvetleri aynı olan köklü iki sayının bölümü, bu sayıların bölümlerinin aynı kuvvetten köküne eşittir.

Kök kuvvetleri farklı olan köklü iki sayıyı bölmek için, önce kök kuvvetleri eşitlenir. Sonra bölme işlemi yapılır.

$a, b \in Z^+ \ (b \neq 0)$ ve $n \in N^+$ ise $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ dir,

ÖRNEKLER 1.131

1. $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

2. $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{\sqrt[3\cdot 2]{15^3}}{\sqrt[2\cdot 3]{5^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{3375}{25}} = \sqrt[6]{135}$

l. Köklü Sayıların Paydasını Rasyonel Yapma

Kareköklü sayılarda paydanın nasıl rasyonel yapıldığını öğrenmiştik. Bu bölümde ise, kök kuvveti ikiden büyük olan köklü ifadelerin paydasını rasyonel yapmayı öğreneceğiz

I. $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ **Şeklinde Verilen Köklü Sayının Paydasını Rasyonel Yapmak**

$\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ şeklindeki verilen köklü sayının paydasını rasyonel yapmak için pay ve payda $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ile çarpılır.

$\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \dfrac{1\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \dfrac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$ olur.

ÖRNEKLER 1.132

1. $$\frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\,.\,\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{25}}{5}$$

2. $$\frac{1}{\sqrt{2}\,.\,\sqrt[3]{3}} = \frac{1\,.\,\sqrt{2}\,.\,\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}\,.\sqrt[3]{3}.\,\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt{2}\,.\sqrt[3]{9}}{2\,.\,3} = \frac{\sqrt{2}\,.\sqrt[3]{9}}{6}$$

II. Paydasında Küpköklü Olan Köklü Sayıların Paydasını Rasyonel Yapmak

Paydasında küpköklü terim bulunduran köklü sayıların paydasını rasyonel yapmak için, $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ ve $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ özdeşliğinden yararlanılır.

ÖRNEKLER 1.133

$\frac{1}{\sqrt[3]{5} - 1}$ sayısının paydasını rasyonel yapalım.

$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$ özdeşliğinde, $a = \sqrt[3]{5}$ ve $b = 1$ olursa,

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 - 1^3 = \left(\sqrt[3]{5} - 1\right)\left[\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 + \sqrt[3]{5} + 1^2\right]$$

$5 - 1 = \left(\sqrt[3]{5} - 1\right)\left(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} + 1\right)$ elde edilir.

$\sqrt[3]{5} - 1$ sayısını rasyonel yapmak için pay ve payda $\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} + 1$ ile çarpılır.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5} - 1} = \frac{1\,.\left(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} + 1\right)}{\left(\sqrt[3]{5} - 1\right).\left(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} + 1\right)} = \frac{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} + 1}{5 - 1} = \frac{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} + 1}{4}$$ olur.

m. Köklü Sayılarda Sıralama

Kök kuvvetleri eşit olan sayılarda, kök içi büyük olan sayı büyüktür. $a < b < c$ ise

$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{c}$ dir.

Kök kuvvetleri eşit değilse, kök kuvvetlerinin e. k. o. k bulunur. Kök kuvvetleri e. k. o. k göre, genişletildikten ve kök kuvvetleri eşitlendikten sonra sıralama yapılır.

ÖRNEKLER 1.134

1. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ve $\sqrt{7}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

   $2 < 3 < 7$ olduğundan, $\sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{7}$ olur.

2. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$ ve $\sqrt[6]{15}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

   Verilen sayıların kök kuvvetleri 3, 2 ve 6 olduğundan, bunların e.k.o.k u 6 dır.

   Buna göre, $\sqrt[3.2]{2^2}$, $\sqrt[2.3]{3^3}$ ve $\sqrt[6]{15}$ ya da $\sqrt[6]{4}$, $\sqrt[6]{27}$ ve $\sqrt[6]{15}$ dir.

   $4 < 15 < 27$ olduğundan, $\sqrt[3]{2} < \sqrt[6]{15} < \sqrt{3}$ olur.

ÖZET

- Karesi $a \in R^+$ sayısına eşit olan iki sayıdan pozitif olanına, a nın pozitif kare kökü, negatif olanına, a nın negatif karekökü denir. a nın pozitif karekökü $\sqrt{a}$, negatif karekökü $-\sqrt{a}$ ile gösterilir. Buna göre, $(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$ dır.

  Bir gerçek sayının karesinin karekökü, o gerçek sayının mutlak değerine eşittir. Her $a \in R$ için. $\sqrt{a^2} = |a|$ dır.

- Kareköklü sayıları toplamak veya çıkarmak için, kök içindeki terimler benzer olmalıdır. Benzer olan terimlerin kat sayılarının toplamı veya farkı, o terimlere kat sayı olarak yazılır.

  $a \geq 0$ ve $b, c, d \in R$ için, $b\sqrt{a} + c\sqrt{a} - d\sqrt{a} = (b + c - d)\sqrt{a}$ dır.

- İki köklü sayıyı çarpmak için, kök içindeki sayılar çarpılır. Ortak kök altında yazılır.

  $a \geq 0$, $b \geq 0$ ve $a, b \in R$ için, $\sqrt{a} . \sqrt{b} = \sqrt{a . b}$ dir.

- İki köklü sayıyı bölmek için, kök içindeki sayılar bölünür. Ortak kök altında yazılır.

  $a \geq 0$, $b \geq 0$ ve $a, b \in R$ için, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ dir.

  Kareköklü bir sayının n. dereceden kuvveti, $a \in R^+$ ve $n \in R^+$ için,

  $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$ dir.

  Çarpımları rasyonel olan iki irrasyonel sayıdan her birine, diğerinin eşleniği denir. Eşlenik iki terimin çarpımı, birinci terimin karesi ile, ikinci terimin karesinin farkına eşittir.

  Paydasında köklü bir sayı bulunan kesrin, paydasındaki kökü kaldırma işlemine, paydayı rasyonel yapma denir. Kareköklü sayıların paydasını rasyonel yapmak için, paydanın eşleniği ile pay ve payda çarpılır.

  $a . b \in R^+$ ve $a^2 > b$ için, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ şeklindeki sayıları,

  $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2} \pm \dfrac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}$ eşitliğinden faydalanarak,

  $\sqrt{p} + \sqrt{k}$ şeklindeki sayılara dönüştürebiliriz.

$a \in R^+$ ve $n \in Z^+$, $n \geq 2$ için, $x^n = a$ eşitliğini sağlayan bir $x \in R^+$ vardır.
Bu sayıya a gerçek sayısının n. kuvvetten kökü denir. $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
şeklinde gösterilir. $\sqrt[n]{a}$ ifadesinde, n ye kök kuvveti denir.

- Kök kuvveti ile kök içinin kuvveti ayın olan sayılar kök dışına çıkar.

  $n \in Z^+$ ve $a, b > 0$ olmak üzere, $\sqrt[n]{a^n . b} = a . \sqrt[n]{b}$ dir.

- Kök içindeki sayının derecesi kökün kuvvetinin tam katı ise, bu sayıyı kök dışına çıkarırken, üssünü kökün kuvvetine böleriz.

  $m, n \in Z^+$ ve $a > 0$ olmak üzere, $\sqrt[n]{a^{nm}} = a^{\frac{nm}{n}} = a^m$ dir.

- Kök dışındaki bir sayı kökün derecesi kadar bir kuvvetle kök içine alınır.

  $n \in Z^+$ ve $a, b > 0$ ise, $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$

- Kök dışındaki üslü bir sayı kök içine alınırken, bu sayının üssü, kökün derecesi ile çarpılır.

  $m, n \in Z^+$ ve $a, b > 0$ ise $a^m \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{mn} b}$

$n \in Z^+$ ve $a > 0$ olmak üzere, $\sqrt[n]{a}$ gibi köklü bir sayının m inci kuvveti,

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ dır.

$m, n \in Z^+$ ve $a > 0$ olmak üzere, $\sqrt[n]{a}$ sayısının m inci dereceden kökü

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$ dir.

$\sqrt[n]{a}$ köklü sayılarının kök kuvvetleri eşitlenirken, kök kuvvetlerinin e.k.o.k u bulunur. Kök kuvvetleri uygun sayılarla genişletilerek eşitlenir.

- Köklü sayıları toplayabilmek veya çıkarabilmek için kök kuvvetleri ile kök içleri aynı olmalıdır. Bu şartlara uyan köklü sayıların katsayıları toplanır veya çıkarılır.

  $x\sqrt[n]{a} + y\sqrt[n]{a} - z\sqrt[n]{a} = (x + y - z)\sqrt[n]{a}$ dır.

- Kök kuvvetleri aynı olan köklü sayıların çarpımı, bu sayıların çarpımının aynı kuvvetten köküne eşittir. Kök kuvvetleri farklı olan köklü sayıları çarpmak için, önce kök kuvvetleri eşitlenir. Sonra çarpma yapılır.

  $a, b \in R^+$ ve $n \in N^+$ ise $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ dir.

- Kök kuvvetleri aynı olan köklü iki sayının bölümü, bu sayıların bölümlerinin aynı kuvvetten köküne eşittir. Kök kuvvetleri farklı olan köklü iki sayıyı bölmek için, önce kök kuvvetleri eşitlenir. Sonra bölme işlemi yapılır.

  $a, b \in Z^+$ $(b \neq 0)$ ve $n \in N^+$ ise $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ dir.

  $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ şeklinde verilen köklü sayının paydasını rasyonel yapmak için pay ve payda

  $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ile çarpılır.

- Paydasında küp köklü terim bulunduran köklü sayıların paydasını rasyonel yapmak için, $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$ ve $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$ özdeşliğinden yararlanılır.

- Kök kuvvetleri eşit olan sayılarda, kök içi büyük olan sayı büyüktür. $a < b < c$ ise

  $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{c}$ dir. Kök kuvvetleri eşit değilse, kök kuvvetlerinin e. k. o. k u bulunur. Kök kuvvetleri e k.o.k a göre, genişletildikten ve kök kuvvetleri eşitlendikten sonra sıralama yapılır.