h. Bir Tam Sayının, Doğal Sayı Kuvveti

a bir tam sayı, n sıfırdan farklı doğal sayı olmak üzere, $a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,...\, a}_{n \text{ tane}}$ ifadesine,

bir tam sayının doğal sayı kuvveti denir.

n çift sayma sayısı ise $(-a)^n = a^n$ dir.

n tek sayma sayısı ise $(-a)^n = -a^n$ dir.

ÖRNEK 1.34

1. $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16 = 2^4$ dir.

2. $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27 = -3^3$ dir.

ı. Tam Sayılarda İşlem Yapma

Aynı veya zıt işaretli tam sayılarla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini ve özeliklerini daha önce gördük.

Bir çok işlemi bir arada bulunduran ifadelerde işlem yaparken, öncelik sırası parantez içindeki ifadelerindir. Sonra sırasıyla kuvvet, çarpma, bölme, toplama ve çıkarma işlemleri yapılır. Buna dikkat edilmez ve parantez kullanılmazsa netice farklı çıkabilir. Şimdi de bunu örneklerle açıklayalım.

I. Bölme işleminin birleşme özeliği olmadığından, a : b : c ifadesindeki işlem anlamsızdır. Tam sayı değeri bulunamaz.

ÖRNEK 1. 35

16 : 4 : 2 ifadesinde, (16 : 4) : 2 şeklinde olursa, 4 : 2 = 2 olur.

16 : 4 : 2 ifadesinde, 16 : (4 : 2) şeklinde olursa, 16 :2 = 8 olur.

O halde, ifadenin sonucu aynı olmuyor. Buna göre, ardışık olarak bölme işlemleri varsa, mutlaka parantez kullanılmalıdır.

II. a . b : c ifadesi anlamlıdır. Çünkü a . (b : c) = (a . b) : c dir.

ÖRNEK 1. 36

16 . 4 : 2 ifadesinde, 16 . (4 : 2) = 16 . 2 = 32 olur.
16 . 4 : 2 ifadesinde, (16 . 4) : 2 = 64 : 2 = 32 olur.

O halde, ifadenin sonucu aynı oluyor.

III. a : b . c yazılışı anlamsızdır. Çünkü (a: b) . c ≠ a : (b . c) dir.

ÖRNEK 1. 37

16 : 4 . 2 ifadesinde, (16 : 4) . 2 = 4 . 2 = 8 dir.
16 : 4 . 2 ifadesinde, 16 : (4. 2) = 16 : 8 = 2 dir.

O halde, ifadenin sonucu aynı olmadından mutlaka parentez kullanılmalıdır.

ÖRNEK 1. 38

1 $\left[(-3).(+2)\right] : (-5+2) = (-6) : (-3) = +2$

2 $\left[(-2^2+3)^3 . 12+4\right] : \left[2+(-1)^3\right] = \left[(-4+3)^3 . 12+4\right] : (+2-1)$

$= \left[(-1)^3 . 12+4\right] : (+1) = (-12+4) : (+1) = (-8) : (+1) = -8$

3 $3(x-y)+5(y-x)+(-y)^2 = 3x-3y+5y-5x+y^2 = -2x+2y+y^2$

ÖRNEK 1. 39

$\frac{3m+8}{m}$ ifadesini tam sayı yapan, m doğal sayılarının toplamını hesaplayalım.

$\frac{3m+8}{m} = \frac{3m}{m} + \frac{8}{m} = 3 + \frac{8}{m}$ dir.

Verilen ifadenin doğal sayı olabilmesi için, $\frac{8}{m}$ doğal sayı olmalıdır. Bunun için, m nin değerleri 8 in doğal sayı bölenleridir. Bunlarda, 1, 2, 4, ve 8 dir.

O halde, istenen toplam 1+ 2 + 4 + 8 = 15 olur.

ÖRNEK 1. 40

Bir kırtasiyeci, 5 tanesini 3000 kuruştan aldığı defterlerin, 3 tanesini 5000 kuruştan satarak 640 lira kazanmıştır. Buna göre, kırtasiyeci kaç tane defter satmıştır?

Kırtasiyeci defterleri 3 lü ve 5 li kümelere ayırabildiğine göre, defterlerin sayısı 15 in katıdır. Bu defterlerin 15 tane olduğunu düşünelim.

15 : 5 = 3	(küme)
3 x 3000 = 9000 kuruş	(Defterlerin alış fiyatı)
15 : = 5	(küme)
5 x 5000 = 25000 kuruş	(Defterlerin satış fiyatı)
25000 - 9000 = 16000 kuruş	(15 defterden yapılan kâr)
640 lira = 64000 kuruş	
64000 : 16000 = 4	(Katı)
15 x 4 = 60 tane	(Defterlerin sayısı)

i. Grup

Bir A kümesi ile bu küme üzerinde tanımlı bir Δ işlemi verilsin. A kümesi Δ işlemiyle birlikte, aşağıdaki dört özeliği sağlıyorsa (A, Δ) sistemine bir grup denir.

I. A kümesi, Δ işlemine göre kapalıdır.

Her a, b ∈ A için, a Δ b ∈ A dır.

II. A kümesinde, Δ işleminin birleşme özeliği vardır.

Her a, b, c ∈ A için, a Δ (b Δ c) = (a Δ b) Δ c dir.

III. A kümesinde, Δ işlemine göre birim eleman vardır.

Her a ∈ A için, a Δ e = e Δ a = a dır. e ∈ A ise e birim elemanıdır.

IV. A kümesinde, Δ işlemine göre, A kümesinin her elemanın tersi vardır.

Her a ∈ A için, a Δ b = b Δ a = e olacak şekilde bir b ∈ A vardır.

ÖRNEK 1. 41

Doğal sayılar kümesi ile, bu küme üzerinde tanımlanan toplama işleminin oluşturduğu (N, +) sisteminin, bir grup olup olmadığını araştıralım.

Bunun için (N, +) sisteminin grup olma şartlarını sağlayıp sağlamadığına bakmalıyız.

I. Her a, b $\in$ N için, (a + b) $\in$ N dir. İki doğal sayının toplamı yine bir doğal sayı olduğundan, doğal sayılar kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

II. Her a, b, c $\in$ N için, a + (b + c) = (a + b) + c olduğundan, doğal sayılar kümesinde toplama işleminin birleşme özeliği vardır.

III. Her a $\in$ N için, a + 0 = 0 + a = a olduğundan, doğal sayılar kümesinde toplama işleminin etkisiz elemanı 0 (sıfır) dır.

IV. Sıfırdan farklı hiçbir doğal sayının, toplama işlemine göre ters elemanı yoktur. 5 sayısının toplama işlemine göre ters elemanı -5 sayısıdır. -5 sayısı doğal sayı olmadığından, doğal sayılar kümesinde toplama işlemine göre ters eleman yoktur.

O halde, doğal sayılar kümesi toplama işlemine göre grup değildir.

ÖRNEK 1.42

Tam sayılar kümesi ile üzerinde tanımlı toplama işlemi, istenilen özelikleri sağladığından grup oluşturur. (Z, +) sistemi bir gruptur.

Tam sayılar kümesinde toplama işleminin, değişme özeliği de vardır. Değişme özeliği olan gruplara değişmeli grup denir. O halde, (Z, +) sistemi değişmeli bir gruptur.

ÖRNEK 1. 43

Tam sayılar kümesi çarpma işlemine göre (Z, .) sisteminin bir grup olup olmadığını araştıralım.

I. Her a, b $\in$ Z için, (a . b) $\in$ Z olduğundan, tam sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.

II. Her a, b, c $\in$ Z için, a. (b. c) = (a . b) . c olduğundan, tam sayılar kümesinde çarpma işlemin birleşme özeliği vardır.

III. Her a $\in$ Z için, a . 1 = 1 . a = a olduğundan, tam sayılar kümesinde çarpma işleminin etkisiz elemanı 1 dir.

IV. Bazı tam sayıların çarpma işlemine göre ters elemanı yoktur.

O halde, tam sayılar kümesi çarpma işlemine göre grup değildir. (Z, .) sistemi grup değildir.

ÖZET

- Doğal sayıları da kapsayacak şekilde, çıkarma işlemine göre kapalı olan, toplama işlemine göre, her elemanın tersi bulunan, daha geniş bir küme tanımlandığında, bu kümeye tam sayılar kümesi denir. Z ile gösterilir.

  $Z^- = \{ ..., -3, -2, -1\}$ kümesine, negatif tam sayılar kümesi,

  $Z^+ = \{1, 2, 3, ...\}$ kümesine, pozitif tam sayılar kümesi denir.

  Buna göre, $Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+ = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ dir.

- Aynı işaretli iki tam sayının toplamını bulurken, sayılar toplanır. Bu sayının işareti, toplamın işareti olur. Zıt işaretli iki tam sayı toplanırken, sayı değeri büyük olandan küçük olan çıkarılır. Toplama büyük olanın işareti verilir.

- $a, b \in Z$ olmak üzere, $a + (-b)$ toplamına a ile b tam sayılarının farkı denir. Bu fark, $a - b$ biçiminde gösterilir. İki sayının farkını bulma işlemine de çıkarma işlemi denir.

- İki tam sayının çarpımı yapılırken, sayıların işaretine bakılmaksızın çarpılır. Çarpanlar aynı işaretli ise çarpımın işareti pozitif (+) olarak alınır. Çarpanlar zıt işaretli ise çarpımın işareti negatif (-) olarak alınır.

- İki tam sayının bölümü yapılırken, sayıların işaretine bakılmaksızın bölme işlemi yapılır. Bölme işleminde aynı işaretli iki tam sayının bölümü pozitif, ters işaretli iki tam sayının bölümü negatif işaretlidir.

- Kalanlı bir bölme işleminde a tam sayısı, b tam sayısına bölündüğünde bölüm c tam sayısı, kalan ise negatif olmayan bir k tam sayısıdır. Bölme eşitliği ise $a = b \cdot c + k$ dır.

- a tam sayısının mutlak değeri $|a|$ ile gösterilir. a pozitif tam sayı ise $|a| = a$ dır. $a = 0$ ise $|a| = |0| = 0$ dır. a negatif tam sayı ise $|a| = -a$ dır.

- Tam sayılar kümesinin elemanlarından, 2 nin katı olanların oluşturduğu kümeye, çift tam sayılar kümesi denir. Tam sayılar kümesinde 2 nin katı olmayan elemanların oluşturduğu kümeye, tek tam sayılar kümesi denir.

a bir tam sayı, n sıfırdan farklı doğal sayı olmak üzere, $a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,...\, a}_{\text{n tane}}$ ifadesine,

bir tam sayının, doğal sayı kuvveti denir.

- Bir çok işlemi bir arada bulunduran ifadelerde işlem yaparken, öncelik sırası parantez içindeki ifadelerindir. Sonra sırasıyla kuvvet, çarpma, bölme, toplama ve çıkarma işlemleri yapılır.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

   a. $(-2) + 6 - (-3) + 5 - 8$

   b. $[(1 - (-4)][- (5 - 6) + (-3 + 7)]$

   c. $[9 - 2(2 - 3)] : [- (3 + 7) - (-3)]$

   ç. $2 + 3 . [5 - 8 : (6 - 2)]$

   d. $2 - 26 : [1 + 3 - (2 + 2)]$

2. 41a2 sayısı 3 ile tam olarak bölünebildiğine göre, sayının onlar basamağındaki "a" yerine yazılabilecek rakamların toplamı kaçtır?

3. Birbirinden farklı üç basamaklı dört tam sayının toplamı 3500 dür. Bunlardan en küçüğü **en az** kaç olabilir?

4. Bir a tam sayısının 41 ile bölümünde bölüm 40 kalan 38 oluyor. Bu sayının 8 ile bölümünden kalan kaçtır?

5. Bir manav karpuzların tanesini 1500 kuruştan satarsa 20000 kuruş zarar, tanesini 2000 kuruştan satarsa 20000 kuruş kâr ediyor. Buna göre, manavın kaç karpuzu vardır?

6. a ve b pozitif tam sayılardır. $a + 2b = 15$ eşitliğinde "a" nın alabileceği, **en küçük** ve **en büyük** değerleri kaçtır?

7. $\dfrac{a+7}{a+2}$ ifadesini tam sayı yapan, "a" nın tamsayı olarak alabileceği değerleri bulunuz.

8. Bir tam sayının 9 eksiğinin 3 katı ile kendisinin 5 fazlası toplanıyor. Toplam 58 olduğuna göre, bu tam sayı kaçtır?

9. $A = \{ -1, 1\}$ kümesi üzerinde tanımlanan çarpma işlemi, bir değişmeli grup oluşturur mu? Neden?

10. Çift tam sayılar kümesi Ç = {..., -4, -2, 0, 2, 4, ...} veriliyor. (Ç, +) sistemi değişmeli grup mudur? Neden?

3. MODÜLER ARİTMETİK

"Saat aritmetiği" de diyeceğimiz bu bölümde, bildiğimiz toplama ve çarpmadan farklı yeni bir toplama ve çarpma işlemlerini göreceğiz.

ÖRNEK 1.44

Gece saat 10 da yatan ve 9 saat uyuyan Ali, sabah saat kaçta kalkmıştır?

Bu problemin çözümü, $10 + 9 = 19$ dur.

Saat üzerinde 19 yoktur. Saat üzerinde 10 dan itibaren 9 birim sayarsak 7 olduğunu görürüz. Saat üzerindeki rakamlarla toplama işlemi $10 + 9 = 7$ olur.

Bu ve bunun gibi işlemler, modüler aritmetik dalının konusudur.

a. Tanım

a ve b tamsayıları verilen bir m pozitif tamsayısına bölündüklerinde, aynı kalanı verirse "a tam sayısı, b tam sayısına, m modülüne göre denktir" denir. $a \equiv b \pmod m$ şeklinde gösterilir.

$a \equiv b \pmod m$ ifadesi aynı zamanda a - b, m ile bölünür. Ya da m, a - b yi böler şeklinde de ifade edilir.

ÖRNEK 1.45

$$\begin{array}{r|l} 3 & 5 \\ \hline -\,0 & 0 \\ \hline 3 \text{ kalan} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 33 & 5 \\ \hline -\,30 & 6 \\ \hline 3 \text{ kalan} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 5 \\ \hline -\,45 & 9 \\ \hline 3 \text{ kalan} & \end{array}$$

$3 = 5 . 0 + 3$	$33 = 5 . 6 + 3$	$48 = 5 . 9 + 3$
$3 \equiv 3 \pmod 5$	$33 \equiv 3 \pmod 5$	$48 \equiv 3 \pmod 5$

Burada 3, 33 ve 48 tam sayılarının, 5 ile bölünmesinden elde edilen kalanlar 3 e eşittir. 5 e bölündüğünde 3 kalanını veren başka tam sayılar da vardır.

Bu durumda, 5 in kalan sınıflarına göre, 3, 33 ve 48 sayıları denktir.

Örnek 1.45'de olduğu gibi, tam sayılar kümesinde, $\beta = \{(a, b) \mid$ a ve b nin 5 ile bölünmesinden elde edilen kalanlar aynıdır.$\}$ bağıntısı ile tanımlanır. Bunu genelleştirirsek, tam sayılar kümesi üzerinde her $m \in Z^+$ için, $\beta = \{(a, b) \mid a - b$, m ile bölünür.$\}$ bağıntısı vardır.

Bu bağıntının, bir denklik bağıntısı olduğunu gösterelim.

1. Her $a \in Z$ için, $(a, a) \in \beta$ (Yansıma)
2. Her $a, b \in Z$ için, $(a, b) \in \beta$ ise $(b, a) \in \beta$ (Simetri)
3. Her $a, b, c \in Z$ için, $(a, b) \in \beta$ ve $(b, c) \in \beta$ ise $(a, c) \in \beta$ dir. (Geçişme)

Bu özeliklere göre, β bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

β denklik bağıntısı, tam sayılar kümesini denklik sınıflarına ayırır.

Bir a tam sayısı 5 e bölündüğünde kalan 0, 1, 2, 3, 4 sayılarından biri olur. Buna göre, tam sayılar kümesi 5 modülüne göre, $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ kalanlar sınıflarına (denklik sınıflarına) ayırır.

Tam sayılar kümesinde, 5 modülüne göre kalan sınıfları;

$\overline{0} = \{..., \overline{-10}, \overline{-5}, \overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, ...\}$

$\overline{1} = \{..., \overline{-9}, \overline{-4}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{11}, ...\}$

$\overline{2} = \{..., \overline{-8}, \overline{-3}, \overline{2}, \overline{7}, \overline{12}, ...\}$

$\overline{3} = \{..., \overline{-7}, \overline{-2}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{13}, ...\}$

$\overline{4} = \{..., \overline{-6}, \overline{-1}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{14}, ...\}$

5 modülüne göre, kalan sınıflarının kümesi $Z / 5$ ile gösterilir.

$Z/5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ olur.

m pozitif tam sayı olmak üzere, tam sayılar kümesi, m modülüne göre;

$\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \left(\overline{m-1}\right)$ kalan sınıflarına (denklik sınıflarına) ayrılır.

m modülüne göre, kalan sınıflarının (denklik sınıflarının) kümesi,

$Z / m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, ..., \left(\overline{m-1}\right)\}$ dir.

m modülüne göre, kalan sınıfları kümesinde a ile b aynı kalan sınıfa ait ise, $a \equiv b \pmod{m}$ şeklinde yazılır.