ALIŞTIRMALAR

1. $\dfrac{12}{a}$ ve $\dfrac{12-a}{3}$ rasyonel sayılarının eşit olması için a yerine hangi tam sayı yazılmalıdır?

2. $\left(1+\dfrac{1}{3}\right):\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}\right)$ işlemini yapınız.

3. $\left[(0{,}7)^2-(0{,}3)^2\right]:\dfrac{4}{5}$ işlemini yapınız.

4. Bir sınıftaki öğrencilerin $\dfrac{4}{7}$ kızdır. Sınıftaki erkek öğrencilerin $\dfrac{2}{5}$ spor çalışmalarına katılıyor. Spor çalışmalarına 12 öğrenci katıldığına göre, Bu sınıfta kaç öğrenci vardır?

5. Bir su deposunun $\dfrac{1}{5}$ doludur. Bu depoya 45 litre daha su konulduğunda deponun yarısı doluyor. Depo dolu iken, içindeki su kaç litredir?

6. Aşağıdaki rasyonel sayıları büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

   a. $-\dfrac{5}{2},\ \dfrac{4}{5},\ \dfrac{1}{4},\ 0,\ \dfrac{3}{4}$ **b.** $-2,\ -\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2},\ 0,\ \dfrac{4}{3}$

7. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

   a. $\dfrac{3}{2-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}$ **b.** $2:\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}}}$ **c.** $\dfrac{4}{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}}$

8. $\dfrac{2}{5}$ e denk olan bir rasyonel sayısının, payına 1 ekleyip paydasından 2 çıkarılırsa, bu rasyonel sayı $\dfrac{5}{11}$ eşit oluyor. Bu rasyonel sayının pay ile paydasının toplamı kaçtır?

9. Aşağıdaki ifadelerin değerlerini hesaplayınız.

   a. $\dfrac{0{,}\overline{5}+1{,}\overline{2}}{0{,}\overline{16}}$ **b.** $\dfrac{0{,}\overline{29}}{0{,}\overline{43}}$

10. $A=\dfrac{2}{3}$; $B=-1\dfrac{1}{2}$; $C=\dfrac{3}{4}$; $D=2\dfrac{1}{4}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayarak, sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

5. GERÇEK (REEL) SAYILAR

Sayılar konusuna başlarken, önce doğal sayılar, sonra bu kümeyi genişleterek tam sayıları ve tam sayılar kümesini de genişleterek, rasyonel sayıları elde ettik. Rasyonel sayılar kümesinin yoğun olduğunundan, herhangi iki rasyonel sayı arasında sonsuz çoklukta başka rasyonel sayılarda vardır. Fakat sayı doğrusu, rasyonel sayılarla dolduramayız. Rasyonel sayılar tarafından yeri, doldurulamayan sayılardan birisi de karesi 2 olan sayıdır. Bu sayı $\sqrt{2}$ şeklinde gösterilir. Bunun gibi $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ sayılarına irrasyonel sayı denir. Bundan başka, π, e gibi sayılarda irasyonel sayılardır.

a. Tanım

Sayı doğrusu üzerinde, rasyonel sayılar tarafından doldurulamayan noktalara karşılık gelen sayılara, irrasyonel sayı denir. Q' ile gösterilir.

Rasyonel sayılar kümesi ile, irasyonel sayılar kümesinin birleşimine de gerçek (reel) sayılar kümesi denir. R ile gösterilir.

$R = Q \cup Q'$ olur. R nin elemanlarına da gerçek sayı denir.

O halde, her gerçek sayıya, sayı doğrusunda bir nokta karşılık geldiğinden gerçek sayılar kümesi, en geniş kümedir.

O halde, $N \subset Z \subset Q \subset R$ olur.

b. Gerçek Sayılar ile İlgili Özelikler

I. Eşitlik ile ilgili Özelikler

Her a, b, c $\in$ R için,

1. İki hal kuralı	$a = b$ veya $a \neq b$
2. Yansıma özeliği	$a = a$
3. Simetri özeliği	$a = b$ ise $b = a$
4. Geçişme özeliği	$a = b$ ve $b = c$ ise $a = c$
5. Toplamada sadeleştirme özeliği	$a = b$ ise $a + c = b + c$
6. Çarpmada sadeleştirme özeliği	$a = b$ ise $a \,.\, c = b \,.\, c$ $(c \neq 0)$

II. Toplama ile İlgili Özelikler

Her $a, b \in R$ için,

1. Kapalılık özeliği — $a + b \in R$
2. Değişme özeliği — $a + b = b + a$
3. Birleşme özeliği — $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. Toplama işleminde etkisiz eleman 0 dır. — $a + 0 = 0 + a = a$
5. Topluma işlemine göre, ters eleman özeliği — $a + (-a) = (-a) + a = 0$

III. Çarpma ile ilgili özelikler

Her $a, b \in R$ için,

1. Kapalılık özeliği — $a . b \in R$
2. Değişme özeliği — $a . b = b . a$
3. Birleşme özeliği — $(a . b) . c = a . (b . c)$
4. Çarpma işleminde etkisiz eleman 1 dir. — $a . 1 = 1 . a = a$
5. Çarpma işlemine göre, ters eleman özeliği — $a . \left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right) . a = 1 \quad (a \neq 0)$

IV. Dağılma özeliği

Her $a, b, c \in R$ için,

1. Çarpma işleminin, toplama işlemi üzerine, soldan dağılma özeliği
   $a . (b + c) = a . b + a . c$
2. Çarpma işleminin, toplama işlemi üzerine, sağdan dağılma özeliği
   $(b + c) . a = b . a + c . a$

Sizde bazı gerçek sayıları kullanarak, gerçek sayılar ile ilgili özeliklerin doğruluğunu gösteriniz.

c. Gerçek Sayılarda Sıralama

$a, b \in Q$ olmak üzere $a \leq b$ ifadesi, "a sayısı b den küçük ya da eşittir" diye okunur.

Gerçek sayılarda " $\leq$ " bağıntısı yansıma, ters simetri ve geçişme özeliklerini sağladığından bir sıralama bağıntısıdır.

$a < b$ ise a sayısı, sayı doğrusu üzerinde b sayısının solunda yer alır.

Sıralama Özelikleri

$a, b, c, d \in R$ için

1. Üç hâl kuralı $a < b$, $a = b$, $a > b$
2. Geçişme özeliği

   I. $a < b$ ve $b < c$ ise $a < c$

   II. $a > b$ ve $b > c$ ise $a > c$

3. Toplama özeliği $a < b$ ve $c < d$ ise $a + c < b + d$
4. Sadeleştirme özeliği $a < b$ ise $a \pm c < b \pm c$
5. I. $a < b$ ise $a c < b c$ $(a > 0$ ise$)$

   II. $a < b$ ise $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ $(c > 0$ ise$)$

   III. $a < b$ ise $ac > bc$ $(c < 0$ ise$)$

   IV. $a < b$ ise $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ $(c < 0$ ise$)$

6. Her $a, b \in Q^+$ ve $a < b$ için, $n. a > b$ olacak biçimde $n \in N^+$ vardır.
7. a ve b aynı işaretli ve $a < b$ ise, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ dir.
8. $0 < a < b$ için, $a^n < b^n$ $(n \in Z^+)$
9. I. $a^2 < a$ ise, $0 < a < 1$

   II. $a^2 > a$ ise $(a < 0$ veya $a > 1)$

10. $a < b < 0$ için,

    I. $a^n < b^n$ (n tek sayı ise)

    II. $a^n > b^n$ (n çift sayı ise)

11.

    I. $a . b < 0$ ise a ile b ters işaretlidir. $(a < 0$ ve $b > 0)$ veya $(a > 0$ ve $b < 0)$ dır.

    II. $a . b > 0$ ise, a ile b aynı işaretlidir. $(a < 0$ ve $b < 0)$ veya $(a > 0$ ve $b > 0)$ dir.

12. I. $a > 0$ ise $a^n > 0$ $(n \in R)$

    II. $a < 0$ ise $a^n > 0$ (n çift sayı)

    III. $a < 0$ ise $a^n < 0$ (n tek sayı)

ÖRNEK 1.75

Sadeleştirme özeliğine göre, bir normal olarak yazalım. Bu eşitsizliğin her iki yanına aynı bir gerçek sayıyı eklersek eşitsizlik yön değiştirmez.

$12 < 15$ ise $12 + 3 < 15 + 3$; $15 < 18$ olur.

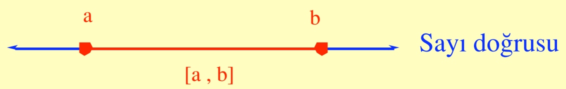
Sizde, bazı gerçek sayılar kullanarak, gerçek sayılarda sıralama özeliklerin doğruluğunu gösteriniz.

ç. Gerçek Sayılarda Aralık Kavramı

Bir eşitsizlik olarak verilen açık önermelerin, doğruluk kümelerini yazabilmek için, aralık kavramını bilmemiz gerekir.

Her $a, b \in Q$ ve $a < b$ olmak üzere,

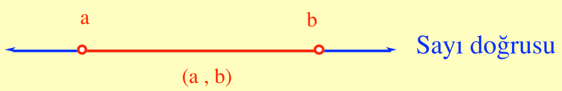
1. $[a, b] = \{x \mid x \in R$ ve $a \leq x \leq b\}$ kümesine, $[a, b]$ kapalı aralığı denir.



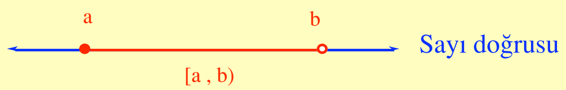
a ile b sayılarına karşılık gelen noktalara, aralığın uç noktaları,

b - a sayısına da aralığın uzunluğu denir.

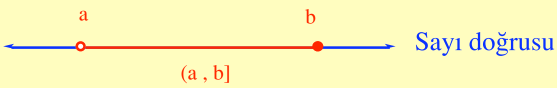
2. $(a . b) = \{x \mid x \in R$ ve $a < x < b\}$ kümesine (a, b) açık aralığı denir.



3. $[a, b) = \{x \mid x \in R$ ve $a \leq x < b\}$ kümesine, a da kapalı, b de açık aralık denir.



4. $(a, b] = \{x \mid x \in R$ ve $a < x \leq b\}$ kümesine a da açık, b de kapalı aralık denir.



ÖRNEK 1.76

$x, y \in R$ için, $-3 \leq x \leq 1$ ve $2 \leq y < 4$ olduğuna göre, $2x + 3y$ ifadesinin hangi aralıkta olduğunu bulalım.

$-3 \leq x \leq 1$ için, $2(-3) \leq 2x \leq 2(1)$; $-6 \leq 2x \leq 2$

$2 \leq y \leq 4$ için, $3(2) \leq 3y \leq 3(4)$; $6 \leq 3y \leq 12$

$$\begin{array}{rl} & -6 \leq 2x \leq 2 \\ + & 6 \leq 3y \leq 12 \\ \hline & 0 \leq 2x + 3y \leq 14 \end{array}$$ olur.

O halde, $2x + 3y$ ifadesi $[0, 14]$ kapalı aralığındadır.

ÖRNEK 1.77

$-1 \leq 2x + 3 < 9$ eşitsizliğinin reel sayılardaki çözüm kümesini bulalım. Sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

$-1 \leq 2x + 3 < 9$

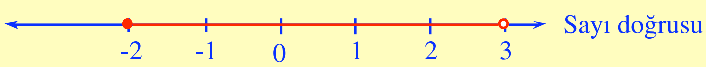
$-1 - 3 \leq 2x + 3 - 3 < 9 - 3$

$-4 \leq 2x < 6$

$-2 \leq x < 3$

$Ç = \{x \mid x \in R, \ -2 \leq x < 3\} = [-2, 3) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Şimdi de çözüm kümesini sayı doğrusu üzerinde gösterelim.



d. Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

İçinde bilinmeyen bulunan ve bilinmeyenin bazı değerleri için doğruluğu sağlanabilen eşitliklere denklem denir.

a, b, c birer gerçek sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere, $ax + b = c$ şeklindeki ifadelere, birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

Gerçek sayılarda eşitliğin özeliklerinden bazılarını kullanarak, sayı kümesinde verilen eşitlikle ilgili denkemlerin (açık önermelerin), çözüm (doğruluk) kümelerini bulalım.

ÖRNEK 1. 78

$5x - 2 = 3$ Denkleminin doğal sayılar kümesinde çözüm kümesini bulalım.

$5x - 2 = 3$; $5x = 3 + 2$; $5x = 5$; $x = 1$ $Ç = \{1\}$ dir.

ÖRNEK 1. 79

$3x + 2 = 4$ denkleminin tam sayılar kümesinde, çözüm kümesini bulalım.

$3x + 2 = 4$; $3x = 4 - 2$; $3x = 2$;

$x = \frac{2}{3}$; $x = \frac{2}{3} \notin Z$ dir.

O halde, denklemin Z de çözüm kümesi boş kümedir. $Ç = \varnothing$

ÖRNEK 1.80

$\frac{5}{6}x + 1 = \frac{2}{3}$ denkleminin çözüm kümesini,

a. Doğal sayılar kümesinde,

b. Tam sayılar kümesinde,

c. Rasyonel sayılar kümesinde,

d. Gerçek sayılar kümesinde bulalım.

$$\underset{(1)}{\frac{5}{6}}x + \underset{(6)}{\frac{1}{1}} = \underset{(2)}{\frac{2}{3}} \;;\quad \frac{5}{6}x + \frac{6}{6} = \frac{4}{6} \;;$$

$$\frac{5}{6}x = \frac{4}{6} - \frac{6}{6} \;;\quad \frac{5}{6}x = -\frac{2}{6} \;;\quad x = -\frac{2}{5}$$ olur.

Verilen denklemin;

a. Doğal sayılardaki çözüm kümesi, Ç = $\varnothing$ dir.

b. Tam sayılardaki çözüm kümesi, Ç = $\varnothing$ dir.

c. Rasyonel sayılardaki çözüm kümesi, Ç = $\left\{-\frac{2}{5}\right\}$ dir.

d. Gerçek sayılardaki çözüm kümesi, $\left\{-\frac{2}{5}\right\}$ olur.

e. Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

$a \neq 0$, a, b bilinen gerçek sayılar, x değişken gerçek sayı olmak üzere, $ax + b > 0$ veya $ax + b < 0$ şeklindeki ifadelere birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler denir.

$x > 1$, $x < -3$, $-2x + 6 \geq 0$, $5x - 2 \leq 0$ ifadeleri, birinci dereceden bir bilinmeyenli birer eşitsizliktir. Çünkü bu eşitsizliklerin içinde bir bilinmeyen vardır. Bu bilinmeyenin derecesi, birinci derecedendir.

Eşitsizlikleri sağlayan elemanları bulma işlemine, eşitsizliği çözme, bu elemanların kümesine de eşitsizliğin çözüm kümesi denir.

Gerçek sayılarda sıralamanın özeliklerden bazılarını kullanarak, sayı kümelerinde verilen eşitsizlikle ilgili denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.

ÖRNEK 1.81

$2x + 5 \leq 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini,

a. Doğal sayılar kümesinde,

b. Tam sayılar kümesinde,

c. Rasyonel sayılar kümesinde,

ç. Gerçek sayılar kümesinde, bulalım.

d. Çözüm kümesini sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

Verilen eşitsizliği, çözersek,

$2x + 5 \leq 1$; $2x \leq 1 - 5$; $2x \leq -4$; $x \leq -2$ olur.

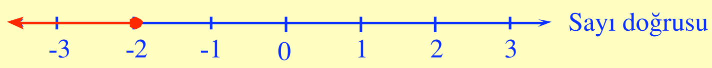
a. Doğal sayılardaki çözüm kümesi, Ç = $\varnothing$

b. Tam sayılardaki çözüm kümesi, Ç = $\{x \mid x \leq -2,\ x \in Z\}$

c. Rasyonel sayılardaki çözüm kümesi, $Ç = \{x \mid x \leq -2,\ x \in Q\}$

ç. Gerçek sayılardaki çözüm kümesi, $Ç = \{ x \mid x \leq -2,\ x \in R\}$ olur.

d. Şimdi de çözüm kümesini sayı doğrusu üzerinde gösterelim.



ÖRNEK 1.82

Gerçek sayılar kümesinde, $-5 \leq 2x - 1 \leq 7$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım ve sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

Verilen eşitsizliği çözersek,

$-5 \leq 2x - 1 \leq 7$; $-5 + 1 \leq 2x \leq 7 + 1$; $-4 \leq 2x \leq 8$; $-2 \leq x \leq 4$ dir.

Gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesi, $Ç = \{x \mid -2 \leq x \leq 4,\ x \in R\}$ olur.

Çözüm kümesi, sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir.