ÖZET

- Sayı doğrusu üzerinde, rasyonel sayılar tarafından doldurulamayan noktalara karşılık gelen sayılara irrasyonel sayı denir. Q' ile gösterilir. Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşimine de gerçek (reel) sayılar kümesi denir. R ile gösterilir. $R = Q \cup Q'$ olur. Gerçek sayılar kümesi en geniş kümedir. $N \subset Z \subset Q \subset R$ olur. Gerçek sayılarla ilgili birçok özelikler vardır. Bunlar yardımıyla denklemleri çözebiliriz.

- $a, b \in Q$ olmak üzere $a \leq b$ ifadesine, a sayısı b den küçük ya da eşittir denir. Gerçek sayılarda "$\leq$" bağıntısı, yansıma, ters simetri ve geçişme özeliklerini sağladığından bir sıralama bağıntısıdır. $a < b$ ise a sayısı sayı doğrusu üzerinde b nin solunda yer alır. Sıralama ile ilgili birçok özelikler vardır.

- Bir eşitsizlik olarak verilen açık önermelerin, doğruluk kümelerini yazabilmek için, aralık kavramını bilmemiz gerekir.

Her $a, b \in Q$ ve $a < b$ olmak üzere

1. $[a, b] = \{x \mid x \in R \text{ ve } a \leq x \leq b\}$ kümesine, $[a, b]$ kapalı aralığı denir.
2. $(a . b) = \{x \mid x \in R \text{ ve } a < x < b\}$ kümesine, (a, b) açık aralığı denir.
3. $[a, b) = \{x \mid x \in R \text{ ve } a \leq x < b\}$ kümesine, a da kapalı, b de açık aralık denir.
4. $(a, b] = \{x \mid x \in R \text{ ve } a < x \leq b\}$ kümesine, a da açık, b de kapalı aralık denir.

- İçinde bilinmeyen bulunan ve bilinmeyenin bazı değerleri için doğruluğu sağlanabilen eşitliklere denklem denir. a, b, c birer gerçek sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax + b = c$ şeklindeki ifadelere, birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

- $a \neq 0$, a, b bilinen gerçek sayılar, x değişken gerçek sayı olmak üzere $ax + b > 0$ veya $ax + b < 0$ şeklindeki ifadelere, birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler denir. Eşitsizlikleri sağlayan elemanları bulma işlemine, eşitsizliği çözme, bu elemanların kümesine de, eşitsizliğin çözüm kümesi denir.

ALIŞTIRMALAR

1. a, b $\in$ R olmak üzere, aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $3(x - 2) - 2(3 + x) = 5(-x - 3)$

b. $2(x - 1) - 4[4 - 3(x + 1)] = 10x - 7$

c. $2(2x - 1) = 5x + 5$

2. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini R de bulunuz.

a. $\frac{5x - 2}{3} - \frac{x + 2}{2} = \frac{x - 5}{3} - 3$

b. $\frac{2x - 5}{3} - \frac{5x}{4} + \frac{2}{3} = 0$

c. $\frac{3x - 1}{3} - \frac{5x + 2}{12} = \frac{x - 3}{4} - \frac{1}{2}$

3. Aşağıdaki eşitsizliklerin gerçek sayılarda, çözüm kümelerini bulunuz. Sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

a. $\frac{x - 1}{2} < x + 5$

b. $\frac{1}{2}x - 1 \geq \frac{x - 1}{4}$

c. $\frac{x + 1}{2} - 2 < \frac{x}{3} + 1$

4. Aşağıdaki eşitsizliklerin gerçek sayılarda, çözüm kümelerini bulunuz. Sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

a. $4\left(\frac{x - 1}{2}\right) < 3x - 1 < 2x + 5$

b. $\frac{x - 1}{3} < \frac{x + 1}{2} < \frac{2x + 5}{6}$

c. $x \leq \frac{x}{2} + 5 \leq x + 3$

5. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini, N, Z, Q ve R de bulunuz. R deki çözüm k ü mesini sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

a. $3x < 15$

b. $5x - 2 < -2 < x + 14$

c. $1 - 2x > x + 7$

6. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini, N, Z, Q ve R de bulunuz. R deki çözüm kümesini sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

a. $1 < 2x + 5 < 11$

b. $x + 2 < 2x - 1 < x + 5$

c. $3 \leq 2x - 1 \leq 9$

7. $0 \leq X \leq 4$ ve $2 \leq y \leq 3$ olduğuna göre $4x - 3y$ ifadesinin alabileceği en küçük değer ile en büyük değerlerin toplamı kaçtır?

8. Aşağıdaki ifadelerin aralıklarını bulunuz. Sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

a. $[-2, 1) \cap [-1, 3]$

b. $[-2, 1) \cup [-1, 3]$

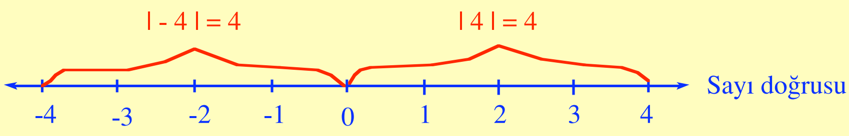
9. $-3 < x < -1$ ifadesinde, x^2 hangi aralıkda değer alır?

10. $-1 < x < 1$ ve $-2 < y < 2$ olduğuna göre, $3x - 2y$ ifadesinin alabileceği tam sayı değerlerini yazınız.

6. MUTLAK DEĞER

Mutlak değeri, gerçek sayı doğrusu üzerinde, herhangi bir noktanın başlangıç noktasına olan uzaklığı şeklinde tanımlayabiliriz. Doğru üzerinde, herhangi bir noktanın koordinatı x olsun. x in başlangıç noktasına olan uzaklığı, $|x|$ sembolü ile gösterilir. x in mutlak değeri olarak okunur.

ÖRNEK 1.83



$|x| = 4$ ise $x = 4$ veya $x = -4$ tür.

Uzak daima pozitif sayılarla ölçülür.

O halde, $x > 0$ ise $|x| = x$

$x = 0$ ise $|x| = |0| = 0$

$x < 0$ ise $|x| = -x$ olur.

a. Tanım

Mutlak değer, $x \in R$ için, x in mutlak değeri $|x|$ sembolü ile gösterilir.

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \text{ ise,} \\ 0, & x = 0 \text{ ise,} \\ -x & x < 0 \text{ ise,} \end{cases} \qquad \text{veya} \qquad |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ ise,} \\ -x, & x < 0 \text{ ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

ÖRNEK 1.84

1. $|-5| = -|-5| = 5$

2. $\left|3 - \sqrt{2}\right| = 3 - \sqrt{2} \quad \left(3 > \sqrt{2}\right)$

3. $\big|\,5 - |-6|\,\big| = |5 - 6| = |-1| = 1$

O halde, $x \in R$ olmak üzere, $|x| \geq 0$ ise $|x|$ sayısı her zaman pozitiftir. Hiç bir zaman negatif olamaz.

b. Mutlak değere ait özelikler

1. $|x|$ ve $|f(x)|$ ifadelerinin en küçük değeri sıfırdır.

   $|x| \geq 0$, $|f(x)| \geq 0$

2. $|x| = |-x| \geq 0$

3. $|x - y| = |y - x|$

4. $-|a| \leq a \leq |a|$

5. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

6. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$

7. $|a^n| = |a|^n \quad (n \in N^+)$

8. $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$ (üçgen eşitsizliği)

9. $|a| < |b|$ ise $-|b| < a < |b|$

10. $|a \cdot b| = 0$ ise $a = 0$ ve $b = 0$

11. $|f(x)| + |g(x)| = 0$ ise $f(x) = 0$ ve $g(x) = 0$

12. $x^2 < y^2$ ise $|x| < |y|$ olur.

Şimdi de bu özeliklere ait örnekler yapalım.

ÖRNEK 1.85

$|2x - 4|$ ifadesini en küçük yapan x in değerini bulalım.

Verilen ifadenin en küçük değeri 0 dır.

$|2x - 4| = 0$ ise $2x - 4 = 0$; $2x = 4$; $x = 2$ olur.

ÖRNEK 1.86

$|x + y - 3| + |x - y - 1| = 0$ ise x ve y nin değerlerini bulalım.

$|f(x)| + |g(x)| = 0$ ise $f(x) = 0$ ve $g(x) = 0$ olduğundan,

$x + y - 3 = 0$ ve $x - y - 1 = 0$ olmalıdır.

$x + y - 3 = 0$ ise $x + y = 3$ (1)

$x - y - 1 = 0$ ise $x - y = 1$ (2)

(1) ve (2) eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{array}{rl} & x + y = 3 \\ + & x - y = 1 \\ \hline & 2x = 4 \\ & x = 2 \text{ olur} \end{array}$$

$x = 2$ değerini (1) eşitliğinde yerine yazarsak

$x + y = 3$ ise $2 + y = 3$; $y = 3 - 2$; $y = 1$ olur.

c. Çeşitli Örnekler

ÖRNEK 1.87

$4\,|x - 2| - 10 = 2$ denkleminin çözüm kümesini reel sayılarla bulalım.

$4\,|x - 2| - 10 = 2$ ise $4\,|x - 2| = 10 + 2$; $4\,|x - 2| = 12$ $\quad |x - 2| = 3$ olur.

$|x - 2| = 3$ ise

a. $x - 2 = 3$; $x = 2 + 3$; $x = 5$ dir. $Ç_1 = \{ x \mid x = 5, x \in R\}$

b. $-x + 2 = 3$; $-x = -2 + 3$; $-x = 1$; $x = -1$ dir. $Ç_2 = \{x \mid x = -1, x \in R\}$

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2$ olduğundan, $Ç = \{ -1, 5 \}$ olur.

ÖRNEK 1.88

$x \in R$ olmak üzere, $|2x - 6| > 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

a. $2x - 6 > 0$ ise $(x \geq 3)$

$2x - 6 > 4$; $2x > 4 + 6$; $2x > 10$; $x > 5$ dir.

$Ç_1 = \{x \mid x > 5, \quad x \in R \}$

b. $2x - 6 < 0$ ise $(x < 3)$

$-2x + 6 > 4$; $-2x > 4 - 6$; $-2x > -2$; $x < 1$ dir.

$Ç_2 = \{x \mid x < 1, \quad x \in R \}$

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2$ olduğundan,

$Ç = \{x \mid x < 1 \text{ veya } x > 5, x \in R \}$ olur.

ÖRNEK 1.89

$|\,3x - 2y\,|$ ifadesinin, en küçük değerini alması için, $\dfrac{x + y}{x - y}$ nin değerinin kaç olduğunu bulalım.

Verilen ifadenin en küçük değeri alması için, ifadenin değeri (0) sıfır olmalıdır.

Buradan, $|3x - 2y| = 0$ olur. $3x - 2y = 0$; $3x = 2y$; $x = \dfrac{2y}{3}$ dir.

Öyleyse, $\dfrac{x + y}{x - y} = \dfrac{\dfrac{2y}{3} + y}{\dfrac{2y}{3} - y} = \dfrac{\dfrac{5y}{3}}{\dfrac{-y}{3}} = \dfrac{5y}{3} \cdot \left(- \dfrac{3}{y}\right) = -5$ olur.

ÖRNEK 1.90

$x \in R$ olmak üzere, $|\,x + 1\,| \leq 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım. Sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

a. $x + 1 \geq 0$ ise $(x \geq -1)$ dir.

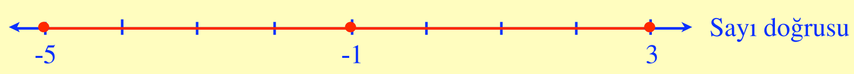
$x + 1 \leq 4$ ise $x \leq 3$ dir. $Ç_1 = \{x \mid -1 \leq x \leq 3,\ x \in R\}$ olur.

b. $x + 1 < 0$ ise $(x < -1)$ dir.

$-(x + 1) \leq 4$ ise $x + 1 \geq -4$; $x \geq -5$ dir. $Ç_2 = \{x \mid 5 \leq x \leq -1,\ x \in R\}$ olur.

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2$ olduğundan $Ç = \{x \mid -5 \leq x \leq 3,\ x \in R\}$ olur.

Şimdi de sayı doğrusunda gösterelim.



ÖRNEK 1.91

$x \in R$ olmak üzere, $\left|\dfrac{4}{x-1}\right| \geq 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini liste yöntemi ile yazalım.

$$\left|\frac{4}{x-1}\right| = \frac{|4|}{|x-1|} = \frac{4}{|x-1|} \quad \text{dir.}$$

$$\frac{4}{|x-1|} \geq 2 \;; \quad 4 \geq 2|x-1| \;; \quad |x-1| \leq 2 \text{ olur.}$$

Bunun çözüm kümesinin aralığını bulalım.

$-2 \leq |x-1| \leq 2$ ifadesinden $-1 \leq x \leq 3$ bulunur.

$-1 \leq x \leq 3$ eşitsizliğini sağlayan tam sayılar; -1, 0, 1, 2 ve 3 tür. Ancak $x = 1$ değeri verilen eşitsizlikteki $\dfrac{4}{x-1}$ ifadesinin paydasını 0 yaptığından çözüme dahil edilmez.

O halde, Ç = {-1, 0, 2, 3} olur.

ÖZET

- Mutlak değer $x \in R$ için, x in mutlak değeri $|x|$ sembolü ile gösterilir.

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \text{ ise,} \\ 0, & x = 0 \text{ ise,} \\ -x & x < 0 \text{ ise,} \end{cases} \quad \text{veya} \quad |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ ise,} \\ -x, & x < 0 \text{ ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

- Mutlak değerlere ait aşağıdaki özelikler vardır.

1. $|x|$ ve $|f(x)|$ ifadelerinin en küçük değeri sıfırdır.

   $|x| \geq 0$, $|f(x)| \geq 0$

2. $|x| = |-x| \geq 0$
3. $|x - y| = |y - x|$
4. $-|a| \leq a \leq |a|$
5. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
6. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$
7. $|a^n| = |a|^n \quad (n \in N^+)$
8. $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$ (üçgen eşitsizliği)
9. $|a| < |b|$ ise $-|b| < a < |b|$
10. $|a \cdot b| = 0$ ise $a = 0$ ve $b = 0$
11. $|f(x)| + |g(x)| = 0$ ise $f(x) = 0$ ve $g(x) = 0$
12. $x^2 < y^2$ ise $|x| < |y|$ olur.

- Bu özelikler yardımıyla, mutlak değerlere ait sorularımızı çözebiliriz.