ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

   a. $2^3 \,.\, 3^3 \,.\, 5^3$

   b. $2x^2 \,.\, 4x^3 \,.\, 8x^4$

   c. $(0,5)^{x+y} \,.\, 2^{x+y}$

   ç. $(x-1)^3 \,.\, (x-1)^4 \,.\, (x-1)^{-2}$

2. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

   a. $(-2)^3 \,.\, (-2)^2 \,.\, (-2^4)$

   b. $(-a)^{-3} \,.\, (-a)^{-4} \,.\, (-a^6)$

   c. $(2^3)^2 \,.\, (-2^2)^3 \,.\, (2)^{-4}$

   ç. $4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4$

3. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

   a. $\dfrac{x^2\, y^2\, x^3 z}{x\,.y^2\, z^2}$

   b. $\dfrac{a^{x+1}\, b^{x+2}}{a^{x-2}\, b^{x-1}}$

   c. $\dfrac{4^{x+1}\, 3^{x-1}}{2^{x+2}\, 9^{x+1}}$

   ç. $\dfrac{(2^3)^2\, 8^3}{16^2}$

4. Aşağıdaki çarpımların sonucu kaç basamaklıdır?

a. $5^9 . 2^{14}$

b. $6^4 . 5^6$

5. $5^{-x-1} . 25^{-x+2} = 125^{x-1}$ ise x kaçtır?

6. $2^x = 5$ ve $5^y = 4$ ise x . y kaçtır?

7. $2^{x+3} . 4^{2x-1} . 8^{-2x} = 128$ ise x kaçtır?

8. $2^{-2x} . 3^{2x-1} . 6^{2x} = 9^{x-1}$ ise x kaçtır?

9. $\dfrac{3\,a^3\,b^2}{4\,a^{-2}\,b^3} . \dfrac{2\,a^{-2}\,b^{-3}}{a^3\,b}$ işlemini en sade biçimde yazınız

10. $\dfrac{3^{a-b} . 6^{4a-2b+1}}{2^{3a-2b+1} . 3^{4a-3b+2}}$ işlemini en sade biçimde yazınız.

8. KÖKLÜ SAYILAR

Daha önce üslü ifadelerde, negatif veya pozitif gerçek sayıların kuvvetlerini bulmuştuk. Bir üslü sayının değeri,

$(-2)^2 = (-2)(-2) = 4$ ve $(2)^2 = (2)(2) = 4$ tür.

Burada, karesi 4 olan iki gerçek sayı vardır. Bunlardan negatif olanı (-2), pozitif olanı da (+2) dir. Fakat karesi -4 olan gerçek sayı yoktur.

O halde, her $x \in R^+$ için, karesi x olan biri negatif diğeri pozitif iki gerçek sayı vardır.

Değeri ve üssü verilen üslü sayıların, tabanını bulma işlemine, kök alma işlemi denir.

a. Tanım

Karesi $a \in R^+$ sayısına eşit olan iki sayıdan pozitif olanına, a nın pozitif kare kökü, negatif olanına, a nın negatif karekökü denir. a nın pozitif karekökü $\sqrt{a}$, negatif karekökü $-\sqrt{a}$ ile gösterilir. Buna göre, $(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$ dır.

Karesi negatif olan gerçek sayı olmadığından, negatif sayıların karekökü yoktur.

$\sqrt{a^2}$ daima pozitiftir. $\sqrt{a^2} \geq 0$ dır.

Bir gerçek sayının karesinin karekökü, o gerçek sayının mutlak değerine eşittir. Her $a \in R$ için, $\sqrt{a^2} = |a|$ dır.

ÖRNEK 1.107

Aşağıdaki kareköklü sayıların eşitlerini bulalım.

$\sqrt{9} = |3| = 3$ dür. $\sqrt{49} = |7| = 7$ dir. $\sqrt{81} = |9| = 9$ dur.

b. Kakeröklü Sayılarda İşlemler

I. Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Kareköklü sayıları toplamak veya çıkarmak için, kök içindeki terimler benzer olmalıdır. Benzer olan terimlerin kat sayılarının toplamı veya farkı, o terimlere kat sayı olarak yazılır.

$a \geq 0$ ve $b, c, d \in R$ için, $b\sqrt{a} + c\sqrt{a} - d\sqrt{a} = (b + c - d)\sqrt{a}$ dır.

ÖRNEK 1.108

$3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = (3 + 4 - 5)\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ olur.

II. Çarpma İşlemi

İki köklü sayıyı çarpmak için, kök içindeki sayılar çarpılır. Ortak kök altında yazılır.

$a \geq 0,\ b \geq 0$ ve $a, b \in R$ için, $\sqrt{a} . \sqrt{b} = \sqrt{a . b}$ dir.

ÖRNEK 1.109

$\sqrt{27} . \sqrt{3} = \sqrt{27 . 3} = \sqrt{81} = 9$ olur.

III. Bölme İşlemi

İki köklü sayıyı bölmek için, kök içindeki sayılar bölünür. Ortak kök altında yazılır.

$a \geq 0,\ b \geq 0$ ve $a, b \in R$ için, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ dir.

ÖRNEK 1.110

$\dfrac{\sqrt{0,8}}{\sqrt{0,2}} = \sqrt{\dfrac{0,8}{0,2}} = \sqrt{\dfrac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$ olur.

IV. Kareköklü Bir Sayının n. Kuvveti

$a \in R^+$ ve $n \in R^+$ için, $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$ dir.

ÖRNEK 1.111

$(3\sqrt{3})^4 = 3^4 . \sqrt{3^4} = 3^4 . 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$ dır.

V. Kareköklü Bir Sayının Eşleniği

Çarpımları rasyonel olan iki irrasyonel sayıdan her birine, diğerinin eşleniği denir. Eşlenik iki terimin çarpımı, birinci terimin karesi ile ikinci terimin karesinin farkına eşittir.

$a, b \in R^+$ için, $\sqrt{a}$ nın eşleniği, $\sqrt{a}$ dır.

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ nin eşleniği, $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ dir.

Karaköklü bir sayıyı eşleniği ile çarpınca, elde edilen değer, daima rasyonel bir sayıdır.

ÖRNEK 1.112

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ ün eşleniği, $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ dir. Bu sayıların çarpımları,

$(\sqrt{3}-\sqrt{2}).(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = \sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2 = 3-2=1$ olur.

VI. Kareköklü bir Sayının Paydasını Rasyonel Yapmak

Paydasında köklü bir sayı bulunan kesrin, paydasındaki kökü kaldırma işlemine, paydayı rasyonel yapma denir.

Kareköklü sayıların paydasını rasyonel yapmak için, paydanın eşleniği ile pay ve payda çarpılır.

ÖRNEK 1.113

Aşağıdaki ifadelerin paydalarını rasyonel yapalım.

1. $\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ olur.

2. $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1).(\sqrt{5}+1)} = \dfrac{4(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}^2-(1)^2} = \dfrac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \dfrac{4(\sqrt{5}+1)}{4} = \sqrt{5}+1$ olur.

3. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1).(\sqrt{2}-1)} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{\sqrt{2}^2-(1)^2} = \dfrac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1} = 3-2\sqrt{2}$ olur.

VII. $\sqrt{a \mp \sqrt{b}}$ Şeklindeki Sayıları, $\sqrt{p} \pm \sqrt{k}$ Şekline Dönüştürmek

I. $a.b \in R^+$ ve $a^2 > b$ için, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ sayılarının iki kök toplamı veya farkı şeklinde yazılabilmesi için, $a \pm \sqrt{b}$ nin tam kare olması gerekir. Bunun için, verilen sayı $\sqrt{a+2\sqrt{m}}$ şeklinde yazılabiliyorsa, çarpımları m, toplamları a olan iki sayı bulunur.

Bu sayılar p ve k olmak üzere,

$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{a \pm 2\sqrt{m}} = \sqrt{p} \pm \sqrt{k}$ dir. $(p > k)$

ÖRNEK 1.114

$\sqrt{12-2\sqrt{35}}$ sayısının eşitini bulalım.

Yukarıdaki ifadeye göre düşünürsek,

çarpımları 35, toplamları 12 olan iki sayı 7 ve 5 tir.

O halde, $\sqrt{12-2\sqrt{35}} = \sqrt{7}-\sqrt{5}$ olur.

ÖRNEK 1.115

$\sqrt{8+\sqrt{60}}$ sayısının eşitini bulalım.

Önce, $\sqrt{8+\sqrt{60}}$ sayısını, $\sqrt{a+2\sqrt{m}}$ şekline dönüştürelim.

$\sqrt{8+\sqrt{60}} = \sqrt{8+\sqrt{4.15}} = \sqrt{8+2\sqrt{15}}$ dir.

Çarpımları 15, toplamları 8 olan iki sayı 5 ve 3 tür.

O halde, $\sqrt{8+\sqrt{60}} = \sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$ olur.

II. $a \,.\, b \in R^+$ ve $a^2 > b$ için, $\sqrt{a \mp \sqrt{b}}$ şeklindeki sayıları

$$\sqrt{a \mp \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \mp \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$ eşitliğinden faydalanarak,

$\sqrt{p}+\sqrt{k}$ şeklindeki sayılara dönüştürebiliriz.

ÖRNEK 1.116

$\sqrt{2+\sqrt{3}}$ ifadesinin eşitini yukarıdaki formülü kullanarak bulalım.

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3}}{2}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\,.\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,.\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$ olur.

VIII. Kareköklü Bir Sayının Sadeleştirilmesi

Kareköklü bir sayıda, gerekli işlemler yapılarak en sade şekilde yazılmasına, kareköklü bir sayının sadeleştirilmesi denir.

ÖRNEK 1.117

Aşağıdaki köklü ifadeleri, en sade şekilde yazalım.

a. $\sqrt{x^4 y^6 z^2} = \sqrt{(x^2 y^3 z)^2} = x^2 y^3 z$ dir.

b. $\sqrt{a\, b^{-3} c^{-1}} \,.\, \sqrt{a\, b^5 c^3} = \sqrt{\frac{a^2 b^5 c^3}{b^3 c}} = \sqrt{a^2 b^2 c^2} = a\, b\, c$ dir.

c. Kareköklü Denklemler

ÖRNEK 1.118

$\sqrt{2x+1} = 5$ Denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$\left(\sqrt{2x+1}\right)^2 = 5^2$$

$$2x + 1 = 25$$

$$2x = 24$$

$$x = 12 \quad \text{dir.}$$

Şimdi, x = 12 nin denklemi sağlayıp, sağlamadığına bakalım.

$\sqrt{2x+1} = 5$; $\sqrt{2(12)+1} = 5$; $\sqrt{24+1} = 5$; $\sqrt{25} = 5$; $5 = 5$ tir.

O halde, çözüm kümesi $Ç = \{12\}$ olur.

Kareköklü denklemlerin çözümünde bulunan x değerinin, verilen denklemi sağlayıp sağlamadığına bakılır. Eğer denklemi sağlamıyorsa, çözüm kümesinin elemanı olamaz. Bu zamanda çözüm kümeleri boş kümedir.

ÖRNEK 1.119

$2\sqrt{x+4} = -5$ Denklemin çözüm kümesini bulalım.

Eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$\left(2\sqrt{x+4}\right)^2 = (-5)^2$$

$$4(x+4) = 25$$

$$4x + 16 = 25$$

$$4x = 9$$

$$x = \frac{9}{4}$$

Şimdi bulduğumuz $x = \frac{9}{4}$ sayısının, denklemi sağlayıp sağlamadığına bakalım.

$2\sqrt{x+4} = -5$

$2\sqrt{\frac{9}{4}+4} = -5$

$2\sqrt{\frac{25}{4}} = -5$

$2 \cdot \frac{5}{2} = -5$

$5 \neq -5$ olduğundan, $x = \frac{9}{4}$ denklemi sağlamaz.

O halde, bu denklemin çözüm kümesi $Ç = \varnothing$ dir.

ç. Gerçek Sayıların Rasyonel Kuvvet:

$a \in R^+$ ve $n \in Z^+$, $n \geq 2$ için, $x^n = a$ eşitliğini sağlayan bir $x \in R^+$ vardır. Bu sayıya, a gerçek sayısının n. kuvvetten kökü denir.

$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ şeklinde gösterilir. $\sqrt[n]{a}$ ifadesinde, n ye kök kuvveti denir.

n = 2 ise a nın karekökü diye okunur. $\sqrt[2]{a}$ veya kısaca $\sqrt{a}$ yazılır.

n = 3 ise a nın küp kökü diye okunur. $\sqrt[3]{a}$ şeklinde yazılır.

n = m ise a nın m. dereceden kökü diye okunur $\sqrt[m]{a}$ şeklinde yazılır.

ÖRNEK 1.120

1. $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}} = (3)^{2\cdot\frac{1}{2}} = 3$
2. $\sqrt[3]{11} = 11^{\frac{1}{3}}$
3. $\sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{6}}$
4. $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{-\frac{2}{3}}$

d. Kök İçindeki Sayıyı Kök Dışına Çıkarma

I. Kök Kuvveti İle Kök İçindeki Sayının Kuvveti Aynı İse

Kök kuvveti ile kök içinin kuvveti aynı olan sayılar kök dışına çıkar.

$n \in Z^+$ ve $a, b > 0$ olmak üzere, $\sqrt[n]{a^n . b} = a . \sqrt[n]{b}$ dir.

ÖRNEK 1.121

1. $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$
2. $\sqrt[5]{x^5 . y} = x . \sqrt[5]{y}$
3. $\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \sqrt[4]{\frac{3^4}{2^4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}\right)^4} = \frac{3}{2}$

II. Kök Kuvveti İle Kök İçindeki Sayının Kuvveti Aynı Değilse

Kök içindeki sayının derecesi, kökün kuvvetinin tam katı ise, bu sayıyı kök dışına çıkarırken, üssünü kökün kuvvetine böleriz.

$m, n \in Z^+$ ve $a > 0$ olmak üzere, $\sqrt[n]{a^{nm}} = a^{\frac{nm}{n}} = a^m$ dir.

ÖRNEK 1.122

1. $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$
2. $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{2^8} = 2^{\frac{8}{4}} = 2^2 = 4$
3. $\sqrt[5]{a^{16} b^{20}} = \sqrt[5]{a^{15} . a . b^{20}} = a^{\frac{15}{5}} b^{\frac{20}{5}} . \sqrt[5]{a} = a^3 b^4 \sqrt[5]{a}$

e. Kök Dışındaki Sayıyı Kök İçine Alma

I. Kök Dışındaki Sayı Üslü Değilse

Kök dışındaki bir sayı kökün derecesi kadar bir kuvvetle kök içine alınır.

$n \in Z^+$ ve $a, b > 0$ ise, $a.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ dir.

ÖRNEK 1.123

1. $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 . 3} = \sqrt[3]{8 . 3} = \sqrt[3]{24}$