BELİRSİZ İNTEGRALLER

Tanım f bir I aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in I$ için

$$F'(x) = f(x)$$

bağıntısını sağlayan bir F fonksiyonu varsa bu F fonksiyonuna f fonksiyonunun bir antitürevi denir.

Örnek 1. $f(x) = 3x^2$ fonksiyonunun bazı antitürevleri: $F(x) = x^3 + 4$, $G(x) = x^3 - \sqrt{5}$ ve $H(x) = x^3 - 7$ dir.

Teorem I aralığı üzerinde $F'(x) = f(x)$ ise, I üzerinde f fonksiyonunun her bir G antitürevi, c bir sabit olmak üzere

$$G(x) = F(x) + c$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım f fonksiyonu I aralığı üzerinde türevlenebilir olsun. f fonksiyonunun tüm antitürevlerinin sınıfına f fonksiyonunun x değişkenine göre belirsiz integrali denir ve

$$\int f(x)dx$$

ile gösterilir. $\int$ sembolüne integral işareti, $f(x)$ ifadesine integrant, x değişkenine ise integrasyon değişkeni adı verilir.

Bu tanıma göre f fonksiyonunun I aralığı üzerinde bir antitürevi F ise,

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

olacaktır.

Özellik Her a, b reel sayısı için

$$\int [af(x) + bg(x)]\, dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

eşitliği gerçeklenir.

İyi bilinen bazı türev formülleri yardımıyla aşağıdaki integral formülleri kolaylıkla elde edilir:

1) $\displaystyle\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \quad (m \neq -1)$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

3) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0)$ 4) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + c$

5) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + c$ 6) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + c$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$ 8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$ 10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

Örnek2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int (x^3 + 3^x)\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3^x}{\ln 3} + c$

b) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right) dx = \int \left(\frac{3}{x} + x^{-\frac{3}{4}}\right) dx = 3\ln|x| + 4x^{\frac{1}{4}} + c$

İntegral Alma Yöntemleri

Doğrudan sonucu elde edilemeyen integralleri hesaplayabilmek için çeşitli yöntemler kullanılmaktadır.

1. Değişken Değiştirme Yöntemi

u sürekli türevlere sahip bir fonksiyon olmak üzere $x = u(t)$ dönüşümü yapıldığında $dx = u'(t)dt$ olacağından

$$\int f(x)dx = \int f\left(u(t)\right)u'(t)dt$$

integrali elde edilir.

Örnek 3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^3}{x}dx$ integralini hesaplamak için $u = \ln x$ seçilirse $du = \dfrac{1}{x}dx$ bulunur. Böylece

$$\int \frac{(\ln x)^3}{x}dx = \int u^3 du$$

eşitliği elde edilir. Sağ taraftaki integral kolaylıkla hesaplanarak

$$\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{(\ln x)^4}{4} + c$$

bulunur.

b) $\displaystyle\int \frac{(1+\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}}dx$ integralinde $u = (1+\sqrt{x})$ seçilirse $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$ bulunur. Bu değerler integralde yerine yazılarak

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}}dx = 2\int u^5 du = 2\frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^6 + c$$

elde edilir.

c) $\displaystyle\int \sin^5 x.\cos x dx$ integralinde $u = \sin x$ alınırsa $du = \cos x dx$ olur. Bu değerler integralde yerine yazılırsa

$$\int \sin^5 x.\cos x dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + c = \frac{(\sin x)^6}{6} + c$$

bulunur.

d) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+6x+5}dx$ integralinde $u = x^2+6x+5$ seçilirse

$$du = (2x+6)\,dx \Longrightarrow \frac{du}{2} = (x+3)\,dx$$

olacaktır. Bu değerler verilen integralde yerine yazılırsa

$$\int \frac{x+3}{x^2+6x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+5\right| + c$$

bulunur.

e) $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^{10}}dx$

f) $\displaystyle\int \tan x dx$

Değişken değiştirme yöntemi kullanılırken bazı özel tipte fonksiyonların integralleri için uygulanan değişken değiştirmeler aşağıdaki gibidir:

1. $\sqrt{a^2-x^2}$ den başka köklü ifade içermeyen fonksiyonların integrali hesaplanırken

$$x = a\sin t, \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

değişken değiştirmesi yapılarak, integrant trigonometrik fonksiyonların bir rasyonel ifadesine dönüştürülür.

2. $\sqrt{x^2-a^2}$ den başka köklü ifade içermeyen fonksiyonların integrali hesaplanırken

$$x = a\sec t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2} \text{ veya } \frac{\pi}{2} < t < \pi$$

dönüşümü yapılarak, köklü ifade içermeyen bir integral elde edilir.

3. $\sqrt{x^2+a^2}$ den başka köklü ifade içermeyen fonksiyonların integrali hesaplanırken

$$x = a\tan t, \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

değişken değiştirmesi yapılarak integrant daha basit biçimde yazılır.

4. Trigonometrik fonksiyonların rasyonel ifadesi biçimindeki integrantlar için

$$\tan\frac{x}{2} = t$$

dönüşümü sonucunda bir rasyonel fonksiyonun integrali elde edilir.

5. $\sqrt[n_i]{ax+b}$ biçiminde ifadeler bulunduran fonksiyonların integrali hesaplanırken, n_i kök kuvvetlerinin en küçük ortak katı p olmak üzere

$$ax+b = t^p$$

değişken değiştirmesi yapılır.

Örnek 4. Aşağıda verilen integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}}$ integralini hesaplamak için $x = 4\sin t$ dönüşümü yapılırsa $dx = 4\cos t dt$ bulunur. Bu değerler integralde yerine yazılarak

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}} = \int \frac{4\cos t dt}{16\sin^2 t\sqrt{16-16\sin^2 t}} &= \frac{1}{16}\int \frac{dt}{\sin^2 t} \\ &= -\frac{1}{16}\cot t + c \\ &= -\frac{1}{16}\cot\left(\arcsin\frac{x}{4}\right) + c\end{aligned}$$

elde edilir.

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$ intrgralini hesaplamak için $x = 2\tan t$ değişken değiştirmesi yapılırsa $dx = 2\sec^2 t dt$ olur. Bu değerler integralde yerine yazılırsa

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2 t dt}{\sqrt{4+4\tan^2 t}} = \int \sec t dt$$
$$= \ln|\sec t + \tan t| + c$$
$$= \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + c$$

bulunur.

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}$ integralini hesaplamak için $x = u^6$ dönüşümü yapıldığında $dx = 6u^5du$ olur. Bu değerler integralde yazılarak

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})} = 6\int \frac{u^5}{u^3\,(1+u^2)}du = 6\int \frac{u^2}{1+u^2}du$$
$$= 6\int \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right) du$$
$$= 6\,(u - \arctan u) + c$$
$$= 6\,(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + c$$

elde edilir.

2. Kısmi İntegrasyon Yöntemi

u ve v, x değişkeninin birer fonksiyonu olsun. Çarpımın türev formülü yardımıyla

$$d(u.v) = du.v + u.dv \Longrightarrow u.dv = d(u.v) - v.du$$

bulunur. Son eşitlikte her iki tarafın integrali alınırsa, kısmi integrasyon formülü olarak bilinen

$$\int udv = uv - \int vdu$$

eşitliği elde edilir.

Örnek 5. Aşağıda verilen integralleri hesaplayınız.

a) $\int x \cos x dx$ integralini hesaplamak için $u = x$ ve $dv = \cos x dx$ seçilirse $du = dx$ ve $v = \int \cos x dx = \sin x$ olur. Buna göre kısmi integrasyon formülünden

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

bulunur.

b) $\int x^4 \ln x dx$ integralini hesaplamak için $u = \ln x$ ve $dv = x^4 dx$ seçilirse $du = \frac{1}{x} dx$ ve $v = \int x^4 dx = \frac{x^5}{5}$ olur. Buna göre,

$$\begin{aligned} \int x^4 \ln x dx &= (\ln x) \frac{x^5}{5} - \frac{1}{5} \int x^5 \frac{1}{x} dx \\ &= (\ln x) \frac{x^5}{5} - \frac{1}{5} \int x^4 dx \\ &= (\ln x) \frac{x^5}{5} - \frac{1}{25} x^5 + c \end{aligned}$$

elde edilir.

c) $\int x e^{6x} dx$ integralini hesaplamak için $u = x$ ve $dv = e^{6x} dx$ seçilirse $du = dx$ ve $v = \int e^{6x} dx = \frac{1}{6} e^{6x}$ bulunur. Buna göre,

$$\begin{aligned} \int x e^{6x} dx &= x \frac{e^{6x}}{6} - \frac{1}{6} \int e^{6x} dx \\ &= x \frac{e^{6x}}{6} - \frac{1}{36} e^{6x} + c \end{aligned}$$

elde edilir.