3. İndirgeme Bağıntıları

Yüksek dereceden bazı fonksiyonların integralleri, kısmi integrasyon metodu yardımıyla daha küçük dereceden bir ifadenin integraline dönüştürülerek daha kolay bir şekilde hesaplanabilir. Kullanılan indirgeme bağıntılarından bazıları şunlardır:

1) $n \in \mathbb{N}$ için $\int \sin^n x dx$ integrali için bir indirgeme formülü aşağıdaki şekildedir:

$$\int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \sin x dx$$

integralinde $u = \sin^{n-1} x$ ve $dv = \sin x dx$ seçilirse $du = (n-1)\sin^{n-2} \cos x dx$ ve $v = -\cos x$ olup kısmi integrasyon formülünden

$$\begin{aligned}
\int \sin^n x dx &= \sin^{n-1} x\,(-\cos x) + (n-1)\int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x dx \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$n\int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx$$

eşitliğine ulaşılır. Son eşitliğin her iki yanı n ile bölünürse

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$$

formülü elde edilir. Sıradaki indirgeme formülleri de benzer şekilde elde edilir.

2) $n \in \mathbb{N}$ için $\int \cos^n x dx$ integrali için indirgeme bağıntısı

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx$$

şeklinde verilir.

3) $n \in \mathbb{N}$ için $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^n x}$ integrali için indirgeme bağıntısı

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$

şeklindedir.

4) $n \in \mathbb{N}$ için $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^n x}$ integrali için indirgeme bağıntısı

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

şeklindedir.

5) $n \in \mathbb{N}$ için $\int \tan^n x dx$ integrali için indirgeme formülü

$$\int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx$$

biçimindedir.

Örnek 1. $\displaystyle\int \sin^5 x dx$ integralini hesaplayınız.

İndirgeme formülünde $n = 5$ alınırsa

$$\int \sin^5 x dx = -\frac{1}{5}\sin^4 x \cos x + \frac{4}{5}\int \sin^3 x dx$$

bulunur. Tekrar indirgeme formülünde $n = 3$ alınarak

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= -\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x + \frac{2}{3}\int \sin x dx \\ &= -\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x - \frac{2}{3}\cos x + c \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\int \sin^5 x dx = -\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3}\sin^2 x\cos x - \frac{2}{3}\cos x\right) + c$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ integralini hesaplayınız.

İndirgeme formülünde $n = 4$ alınırsa

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \frac{1}{3}\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{3}\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{3}\tan x + c\end{aligned}$$

elde edilir.