BELİRLİ İNTEGRAL

$[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı reel bir f fonksiyonu verilsin. $[a,b]$ kapalı aralığını;

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

biçiminde n parçaya bölelim. $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$ kümesine $[a,b]$ kapalı aralığının bir *parçalanması* adı verilir. P parçalanması yardımıyla elde edilen

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$$

aralıklarına $[a,b]$ kapalı aralığının P parçalanmasına karşılık gelen kapalı alt aralıkları denir. Eğer; aralıklar eşit uzunluklu ise, P parçalanması *düzgündür* denir. Herbir alt aralığın uzunluğu;

$$(\forall k)\,(k = 1, 2, ...n) : \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

biçiminde ifade edilir. Eğer; P parçalanması düzgün ise

$$(\forall k)\,(k = 1, 2, ...n) : \Delta x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

dir. Alt aralıkların boylarının en büyüğüne P parçalanmasının *normu* adı verilir ve

$$\|P\| = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k$$

biçiminde ifade edilir.

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu ve $[a,b]$ kapalı aralığının P parçalanması için, herbir alt aralıktan bir c_k noktası seçilerek taban uzunluğu $x_k - x_{k-1}$ ve yüksekliği $f(c_k)$ olan dikdörtgenler elde edilirse bu dikdörtgenlerin alanları her $k = 1, 2, ..., n$ için $|f(c_k)\,\Delta x_k|$ olacaktır. Bu alanların toplamı;

$$R(f, P) = \sum_{k=1}^{n} |f(c_k)\,\Delta x_k|$$

f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen *Riemann Toplamı* olarak adlandırılır. *Riemann Toplamı,* P parçalanmasına ve parçalanmaya karşılık gelen aralıklardan seçtiğimiz c_k sayılarına bağlıdır.

$(\forall k)\,(k = 1, 2, ...n)$ için

$$\begin{aligned} M_k &= \max\{|f(x)| : x_{k-1} < x < x_k\} \\ m_k &= \min\{|f(x)| : x_{k-1} < x < x_k\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanmak üzere

$$A\left(f,P\right)=\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k \text{ ve } \ddot{U}\left(f,P\right)=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k$$

toplamlarına sırasıyla, f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen *Alt Riemann Toplamı* ve *Üst Riemann Toplamı* adı verilir. Tanımlar gözönüne alındığında

$$A\left(f,P\right)\leq R\left(f,P\right)\leq \ddot{U}\left(f,P\right)$$

olacağı açıktır.

Tanım f, $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı, sınırlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer;

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}f\left(c_k\right)\Delta x_k=I \tag{1}$$

limiti mevcut ise, I değerine f fonksiyonunun a dan b ye belirli integrali denir ve

$$I=\int_a^b f\left(x\right)dx$$

biçiminde ifade edilir. Bu durumda; f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde *integrallenebilirdir* denir.

Formel olarak; (1) ile verilen eşitlik:

$\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0\ni\|P\|<\delta$ koşulunu sağlayan herbir P parçalanması ve $k=1,2,...,n$ olmak üzere $[x_{k-1},x_k]$ aralıklarından seçilen herbir c_k için $\left|\sum_{k=1}^{n}f\left(c_k\right)\Delta x_k-I\right|<\varepsilon$

biçiminde ifade edilir.

Teorem $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon>0$ için

$$\ddot{U}\left(f,P\right)-A\left(f,P\right)<\varepsilon$$

olacak biçimde $[a,b]$ aralığının bir P parçalanmasının varolmasıdır.

Örnek 1. $[0,1]$ aralığı için iki farklı parçalanma yazınız ve bu parçalanmalara karşılık gelen Riemann toplamlarını hesaplayınız.

Örnek 2. $\int_0^1 x^2dx$ integralini hesaplayınız.

Örnek 3. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel} \\ 0, & x \text{ irrasyonel} \end{cases}$ fonksiyonunun $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir olup olmadığını araştırınız.

Teorem (a) f, $[a,b]$ üzerinde sürekli ise, $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli, (a,b) üzerinde türevlenebilir ve

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

dir.

(b) f, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve F fonksiyonu f fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde bir antitürevi ise

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

dır.

Örnek 4. (a) $\int\limits_{-1}^{2} (1 - 3|x|)\,dx$ integralini hesaplayınız.

(b) $\int\limits_{-1}^{1} xsgnxdx$ integralini hesaplayınız.

Uyarı $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

(1) $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$ ve $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$ dir.

(2) İntegralin değeri integrasyon değişkeninden bağımsızdır, yani

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt = \cdots = \int\limits_a^b f(s)\,ds$$

yazılabilir.

(3) $c \in (a,b)$ için $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$ dir.

Tanım $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir bir f fonksiyonunun $[a,b]$ üzerindeki ortalama değeri

$$\overline{y} = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

dir.

Teorem $[a,b]$ üzerinde sürekli her f fonksiyonu, $[a,b]$ aralığının bir x_0 noktasında ortalama değerini alır.

Teorem f ve g, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve aynı işaretli fonksiyonlar ise, bir $c \in (a,b)$ için

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx$$

dir.