BELİRLİ İNTEGRALİN UYGULANMASI İLE İLGİLİ PROBLEMLER

Belirli integral kavramı fizik ve mühendislik dallarında alan, hacim ve moment hesapları gibi çeşitli komplike problemlerin analizinde kullanır. Belirli integralin, yatırım ve maliyet analizleri, öğrenme eğrisi gibi önemli işletme problemlerinde de uygulama olanağı vardır. Bu bölümde, belirli integralin işletme problemlerine uygulanmasıyla ilgili birkaç örnekten bahsedilecektir.

Örnek: Bir fabrikanın kalıp atölyesinde kullanılmak üzere fiyatı 37500 lira olan yarı otomatik bir torna tezgahının satın alınması planlanmaktadır. Tezgah alınıp kullanılmaya başlandıktan bir süre sonra artan üretim miktarı sebebiyle sağlanacak tasarrufun, x yıl olarak zamanı göstermek ve $0 \leq x \leq 7$ şartı sağlanmak üzere,

$$y = 2500x$$

bağıntısı ile hesaplanabileceği tespit edilmiştir. Buna göre,

a) 3. yıl sonunda tornanın maliyetinin ne kadarını çıkaracağını,

b) Maliyetin tamamının çıkarılabilmesi için kaç yıl geçmesi gerekeceğini bulunuz.

Çözüm: $y = 2500x$ denklemi ile verilen (zaman-tasarruf) fonksiyonunun grafiği orjinden geçen bir doğru parçasıdır. Herhangi bir andaki tasarrufun değeri bu denklem ile hesaplanabilir. Böyle bir x anından itibaren dx kadar zaman geçmişse, bu zaman içinde sağlanan tasarruf, $y.dx$ ile verilir. Bu tasarrufların $0 \leq x \leq 3$ aralığındaki toplamını bulmak için $y.dx$ diferansiyelinin bu aralıkta integralini almak gerekir. Bu durumda 3. yılın sonundaki tasarruf,

$$\int_0^3 y dx = \int_0^3 2500x dx = \left[1250x^2\right] \Big|_0^3 = 11250$$

lira elde edilir.

Maliyetin tamamının çıkarılması için geçmesi gereken süreyi t ile gösterelim. Fonksiyonun $0 \leq x \leq t$ aralığında integrali alındığında bulunacak sonucun 37500 liraya eşit olması gerekir. O halde,

$$\int_0^t y dx = \int_0^t 2500x dx = \left[1250x^2\right] \Big|_0^t = 1250t^2 = 37500$$

eşitliğinden t çözülürse $t \cong 5.5$ yıl elde edilir.

Örnek: Q birim ürünü t süre stokta bulundurmanın işletmeye yükleyeceği elde bulundurma maliyetleri toplamı, Q ve t değerlerine bağlı olarak değişir. Kabul edelim ki, bir birim ürünü bir yıl stokta bulundurmanın maliyeti I ve stoktaki ürün miktarının zamana göre değişimini veren fonksiyon $Q = f(t)$ olsun. Buna göre, $0 \leq t \leq T$ süresi içindeki elde bulundurma maliyetleri toplamını hesaplayınız.

Çözüm: Aranan toplam maliyeti C ile gösterelim. Eğer Q, $0 \leq t \leq T$ aralığında sabit olsaydı, doğrudan

$$C = I.T.Q$$

şeklinde hesap yapılabilirdi. Ancak Q zamanla değiştiğinden, bir t anından itibaren dt kadar zaman geçmişse bu zaman aralığındaki maliyet,

$$dC = I.f(t)dt \tag{1}$$

şeklinde hesaplanır. (1) eşitliğinin her iki tarafının $0 \leq t \leq T$ aralığında integrali alınırsa,

$$C = I.\int_0^T f(t)dt \tag{2}$$

bulunur. O halde, stoktaki ürün miktarı zamana göre $Q = f(t)$ şeklinde değişiyorsa, $t = 0$ anından $t = T$ anına kadar yapılan elde bulundurma masrafları toplamı $f(t)$ eğrisinin altında kalan alanın I katı olup (2) formülü ile hesaplanır.

Alıştırma: Bir üretim sisteminde, input miktarındaki bir değişme sonucu output (üretilen mal) miktarında meydana gelen değişime marjinal prodüktivite denir. Kabul edelim ki, bir inşaat firması belirli bir yolun asfaltla kaplanması işini belirli bir süre sonunda tamamlamak üzere taahhüt etsin. Yalnız bir asfalt makinesi kullanıldığında her gün yolun belirli uzunluktaki bir kısmı kaplanabilmektedir. Sisteme yeni makineler eklendiğinde, işlerin belirli bir sırayla yapılması zorunluluğu yüzünden, her eklenen makine için makine başına verim belirli bir oranda düşmektedir. Marjinal prodüktivite ile makine sayısı arasındaki bağıntı

$$f(x) = 3 - (0,2)x$$

denklemi ile verilmiştir. Burada x kullanılan makine sayısını gösterdiğinden eklenen her yeni makinenin %20 daha az prodüktif olduğu anlaşılmaktadır. Buna göre, prodüktivitenin maksimum olması için kaç makine kullanılması gerektiğini bulunuz.