DETERMİNANT

A bir kare matris olmak üzere A matrisinin determinantı $\det A$ ya da $|A|$ ile gösterilir.

Minörler

n boyutlu bir A determinantının herhangi bir a_{ij} elemanının minörü, $|A|$ üzerinde a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütun silindikten sonra geriye kalan ve $|A_{ij}|$ ile gösterilen determinanttır. Örneğin,

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1}$$

determinantının a_{13} elemanının minörü

$$|A_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

şeklinde bulunur.

Bir A determinantının a_{ij} elemanının minörü $|A_{ij}|$ olsun. A_{ij} ile gösterilen ve

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

bağıntısı ile tanımlanan determinanta a_{ij} elemanının eş çarpanı (kofaktörü) denir. Örneğin (1) deki A matrisinin a_{13} elemanının kofaktörü

$$A_{13} = (-1)^{1+3} |A_{13}| = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

şeklindedir.

Bir determinantın değerinin bulunması için yapılan işlemlere determinant açılımı denir. Herhangi bir $|A|$ nın açılımı

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ veya } |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

şeklinde verilir. Yani, bir determinantın değeri herhangi bir satır (veya sütun) elemanları ile bu elemanların kofaktörlerinin çarpımının toplamına eşittir.

Örneğin (1) deki A matrisinin determinantını hesaplayabilmek için 1. satıra göre açılım yapılırsa

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

olarak hesaplanır.

Özel olarak $2x2$ boyutundaki bir $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

formülü ile hesaplanır.

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını hesaplayınız.

Çözüm: 1. satıra göre açılım yapalım. Öncelikle a_{11}, a_{12}, a_{13} elemanlarının minörlerini bulalım.

$$\begin{aligned}
|A_{11}| &= \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5.4 - (-3)\,.1 = 23 \\
|A_{12}| &= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4.4 - (-3)\,3 = 25 \\
|A_{13}| &= \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4.1 - 5.3 = -11
\end{aligned}$$

bulnur. Şimdi a_{11}, a_{12}, a_{13} elemanlarının kofaktörlerini bulalım.

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^{1+1}|A_{11}| = 1.23 = 23 \\
A_{12} &= (-1)^{1+2}|A_{12}| = (-1)25 = -25 \\
A_{13} &= (-1)^{1+3}|A_{13}| = 1.\,(-11) = -11
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
|A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\
&= 3.23 + 2\,(-25) + (-2)\,(-11) \\
&= 41
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Determinantın Özellikleri

1) Bir determinantın iki satırının veya sütununun yerleri değiştirildiğinde determinantın işareti değişir.

2) Bir determinantın bir satırı veya sütunu k reel sayısı ile çarpılırsa determinant değeri k ile çarpılmış olur.

3) Bir satır veya bir sütununun bütün elemanları sıfır olan matrisin determinant

değeri sıfırdır.

4) Herhangi iki satır (veya sütun) elemanları eşit veya orantılı ise matrisin determinant değeri sıfırdır.

5) Bir determinantın bir satır (veya sütunu) bir reel sayı ile çarpılıp başka bir satıra (veya sütuna) eklenirse determinantın değeri değişmez.

6) $|A| = \left|A^T\right|$

7) $|A.B| = |A| \, . \, |B|$

8) $|A^n| = |A|^n$

özellikleri sağlanır.