LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

İşletme problemlerinin matematiksel modellerinde n değişken tarafından aynı anda sağlanması gereken m adet lineer denklemden oluşan sistemlerle sıklıkla karşılaşılır. Bu bölümde bir lineer denklem sisteminde yalnız bir çözüm bulunması, sonsuz çözüm olması veya çözüm olmaması gibi durumların hangi şartlar altında meydana geldiği incelenecektir.

Bir lineer denklem sisteminde denklem sayısı m ve değişken sayısı n olmak üzere

1) $m = n$ ise sistemin tek çözümü olabilir veya çözümü yoktur.

2) $m < n$ ise sonsuz çözüm vardır.

3) $m > n$ ise belirli bir koşulla tek çözüm mevcuttur. Aksi durumda çözüm yoktur.

Lineer denklem sistemleri matrisler yardımıyla ifade edilebilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Lineer denklem sistemlerini sistematik ve hızlı şekilde çözen Cramer Metodu aşağıda tanımlanmıştır.

Cramer Kuralı

n denklemden oluşan n değişkenli bir lineer denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

veya katsayılar matrisi A, bilinmeyenler x ve sabit sayılar b olmak üzere

$$Ax = b$$

şeklinde yazılabilir. Bilinmeyenlerin hesaplanmasında

$$x_1 = |A|^{-1} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

formülünden yararlanılır ve benzer şekilde $x_2, x_3, ..., x_{n-1}$ elde edildikten sonra son olarak

$$x_n = |A|^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

olarak verilir.

Örnek

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 10 \\ x + 2y &= 4 \\ 3x + 2z &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemini çözünüz.

Çözüm: Sistemin katsayılar matrisinin determinantı

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

elde edilir. Cramer Kuralı'ndaki formüllerden yararlanılarak

$$x = |A|^{-1} \begin{vmatrix} 10 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}.16 = 2$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$y = |A|^{-1} \begin{vmatrix} 2 & 10 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}.8 = 1$$

ve

$$z = |A|^{-1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}(-24) = -3$$

bulunur. x değişkeni bulunduktan sonra Cramer Kuralı ile devam etmeyip x bilinmeyeni denklemlerde yerine konularak iki bilinmeyen iki denklem sisteminden y ve z değişkenlerinin bulunabileceğine dikkat ediniz.

Alıştırma

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 5 \\ 2y + 3z &= 11 \\ x + y + z &= 6 \end{aligned}$$

denklem sistemini çözünüz.