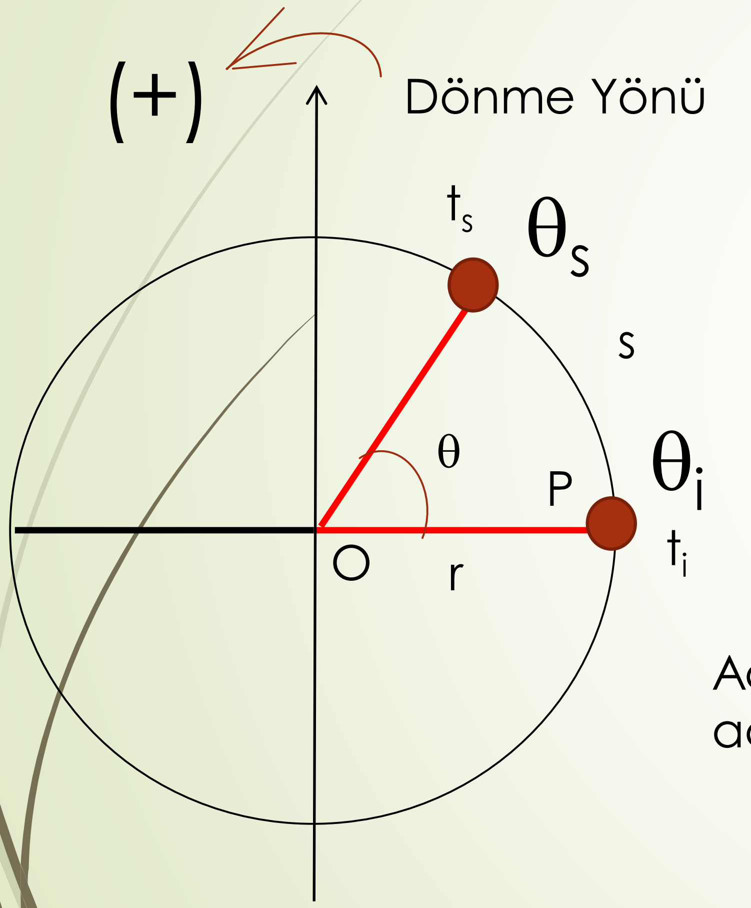
Bölüm 8

Dönme Kinematiği

Dönme Kinematiği

- Açısal Yerdeğiştirme
- Açısal Hız ve Açısal İvme
- Sabit Açısal İvmeli Dönme Hareketi
- Açısal ve Doğrusal Nicelikler Arasındaki Bağıntılar
- Dönme Kinetik Enerjisi
- Tork
- Tork ve Açısal İvme Arasındaki Bağıntı

Açısal Yerdeğiştirme



Parçacık hareket ettikçe, değişen tek koordinat θ'dır. Parçacık θ açısı kadar dönerken, P noktası s uzunluğu kadar yol almıştır. Buna göre;

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Birimi: radyan (rad)

$$1 \text{ devir} = 360^0 = 2\pi \text{ rad}$$

Açısal yerdeğiştirme, nesnenin Δt süresince döndüğü açı olarak tanımlanır:

$$\Delta\theta = \theta_s - \theta_i$$

Saat ibreleri tersi yönündeki açılar pozitif, diger yöndekiler negatif alınır.

Açısal Hız ve Açısal İvme

Dönen bir katı cismin ortalama açısal hızı, ω, açısal yerdeğiştirmenin zaman aralığına oranıdır.

$$\omega_{ort} = \frac{\theta_s - \theta_i}{t_s - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Birimi: radyan/saniye (rad/s).

Ani Açısal Hız (ω) : Ortalama hızın limiti durumu:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Açısal Hız ve Açısal İvme

Açısal hızın birim zamandaki değişimidir:

$$\alpha_{ort} = \frac{\omega_s - \omega_i}{t_s - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Birimi : rad/s^2

Ani açısal ivme : Ortalama ivmenin limit durumu:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

θ, ω, α cismin içindeki ayrı ayrı parçacıkların yanı sıra tüm katı cismin hareketini de karakterize eder.

Sabit Açısal İvmeli Dönme Hareketi

- Açısal hız düzgün olarak değişiyorsa α = sabit olur.
- Sabit ivmeli dönme ve öteleme hareketleri;

Dönme	Öteleme
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$
$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$	$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

Açısal ve Doğrusal Nicelikler arasındaki Bağıntılar

- Dönen cisimdeki her nokta aynı açısal harekete sahiptir.
- Dönen cisimdeki her nokta aynı doğrusal harekete sahip değildir.

- Yerdeğiştirme

$$s = \theta r$$

- Hız

$$v = \omega r$$

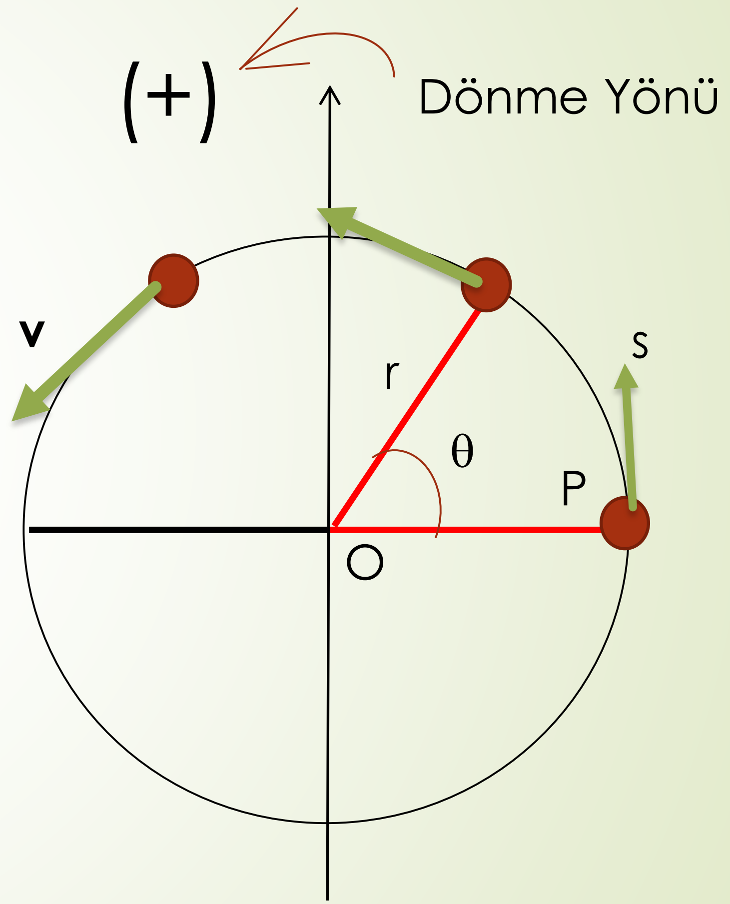
- İvme

$$a = \alpha r$$

Açısal ve Doğrusal Nicelikler arasındaki Bağıntılar

Doğrusal hız her zaman dairesel yola teğet olur. Teğetsel hız denir. Büyüklük teğetsel hızla tanımlanır.

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

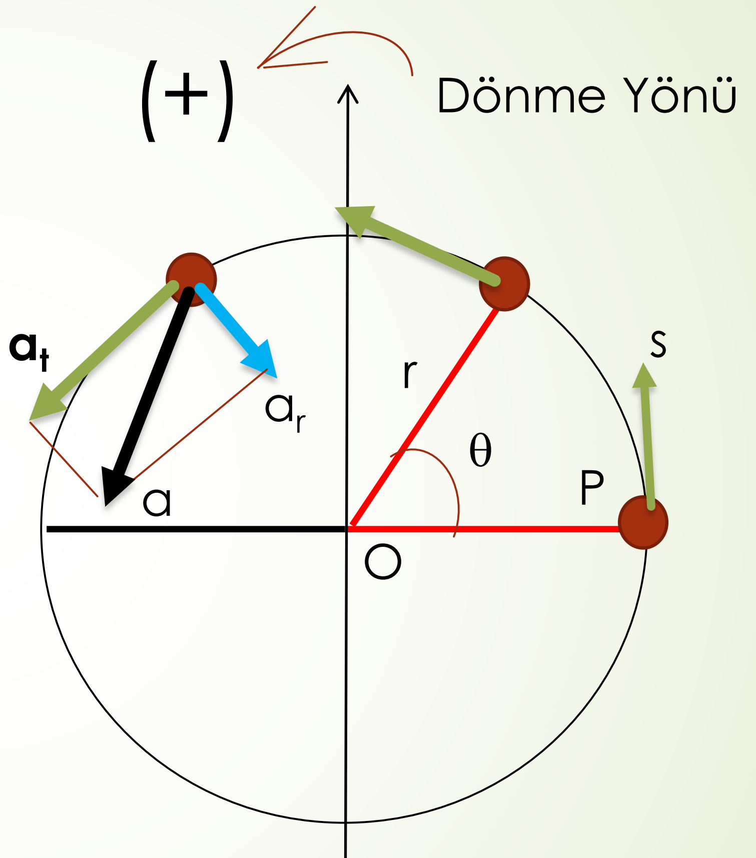


r cisimdeki tüm noktalar için aynı olmadığından, her noktanın teğetsel hızı aynı değildir. Teğet hız, dönme merkezinden dışa doğru ilerledikçe artar.

Açısal ve Doğrusal Nicelikler arasındaki Bağıntılar

Teğetsel ivme, teğetsel hızın türevidir.

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$



Toplam İvme vektörel olarak;

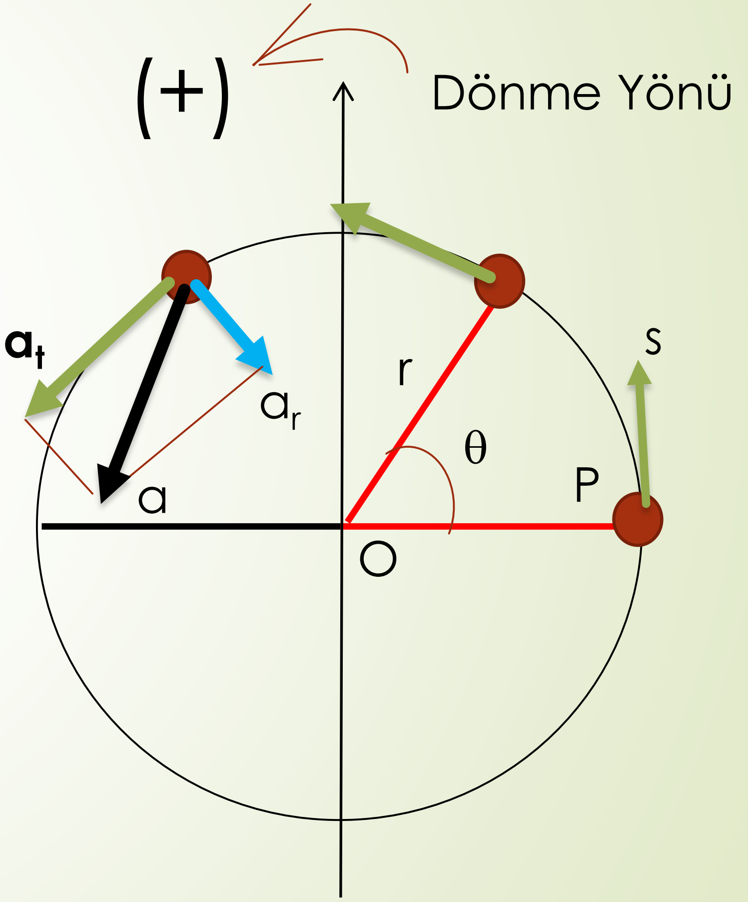
$$\mathbf{a} = \mathbf{a_t} + \mathbf{a_r}$$

- Katı cisim üzerindeki tüm noktalar aynı açısal hıza, ancak aynı teğetsel hıza sahip olmayacaktır.
- Katı cisim üzerindeki tüm noktalarda aynı açısal ivme olur, ancak aynı teğetsel ivme olmaz.
- Teğet miktarlar r'ye bağlıdır ve r, cisim üzerindeki tüm noktalarda aynı değildir.

Açısal ve Doğrusal Nicelikler arasındaki Bağıntılar

Bir daire içinde hareket eden bir cisim, sabit bir hızda hareket ederse de ivme kazanır. Bu nedenle, dönen katı bir cisim üzerindeki her nokta, merkezcil ivmenin etkisinde kalır.

$$a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$



- İvmenin teğetsel bileşeni değişen hızdan kaynaklanmaktadır.
- İvmenin merkezcil bileşeni değişen yöne bağlıdır.

Toplam ivme şu şekilde bulunabilir:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Dönme Kinetik Enerjisi

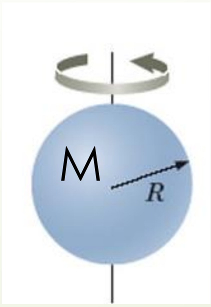
Katı cismin toplam dönme kinetik enerjisi, tüm parçacıklarının enerjilerinin toplamıdır.

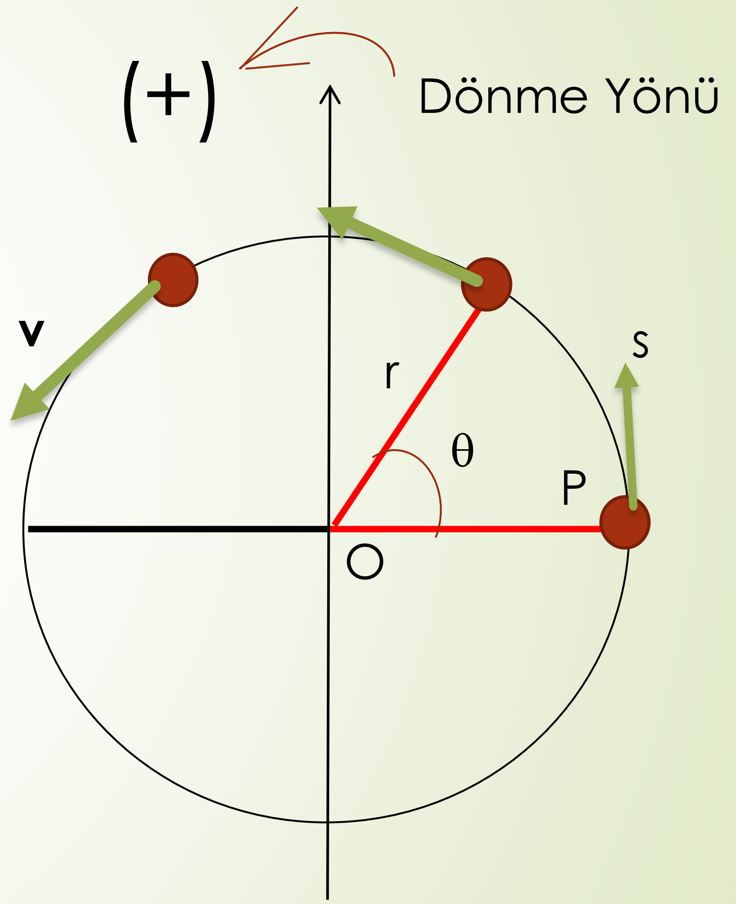
$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

$$K_R = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Burada I eylemsizlik momentidir ve dönen katı cismin geometrisine göre değişmektedir. Örneğin, Kütlesi M olan dönen katı küre için;

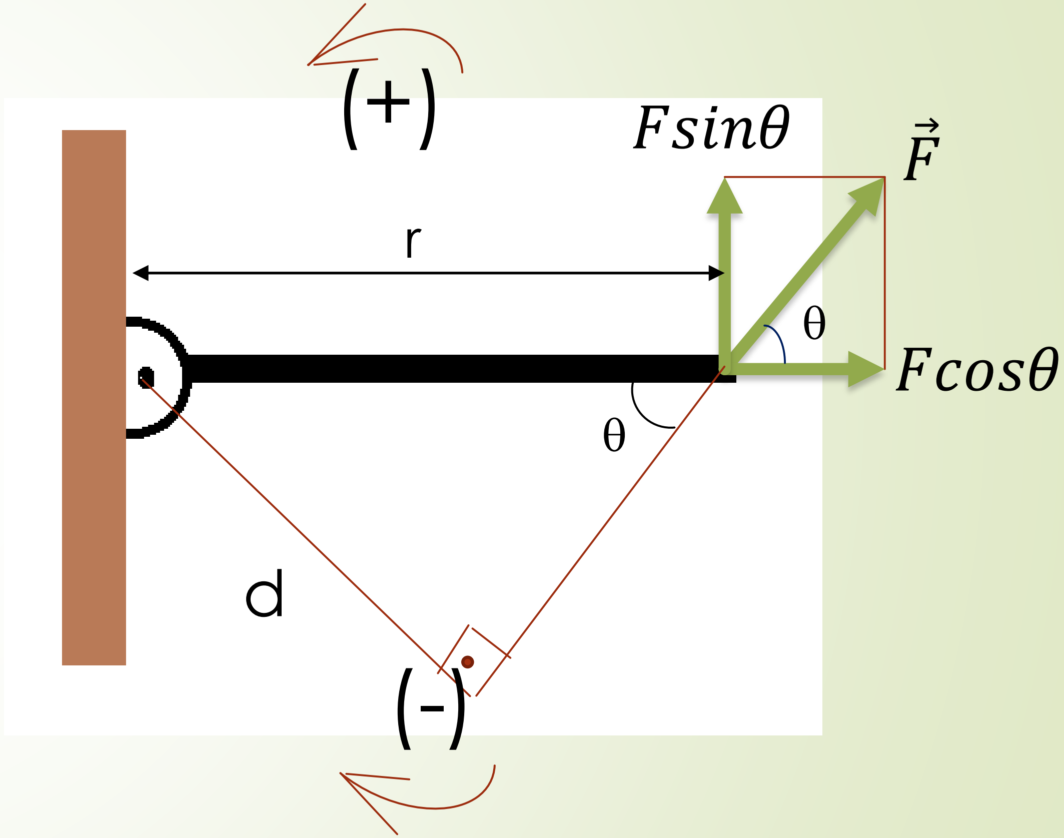
$$I = \frac{2}{5} M R^2$$





Dönme Momenti (Tork)

Bir kuvvetin cismi döndürme kabiliyetine dönme momenti (veya tork) adı verilir.



Tork, τ, bir cismin bir eksende döndürülmesi eğilimidir. Tork vektördür, ancak büyüklüğü burada ele alacağız:

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F} = rFsin\theta = Fd$$

Burada $\mathrm{d} = rsin\theta$.

Tork ve Açısal İvme arasındaki Bağıntı

F kuvvetinin etkisiyle O ekseni etrafında dönen küçük m kütlesi r yarıçaplı dairesel hareket oluşturur

F kuvvetini teğetsel ve merkezcil bileşenleri için Newton yasası:

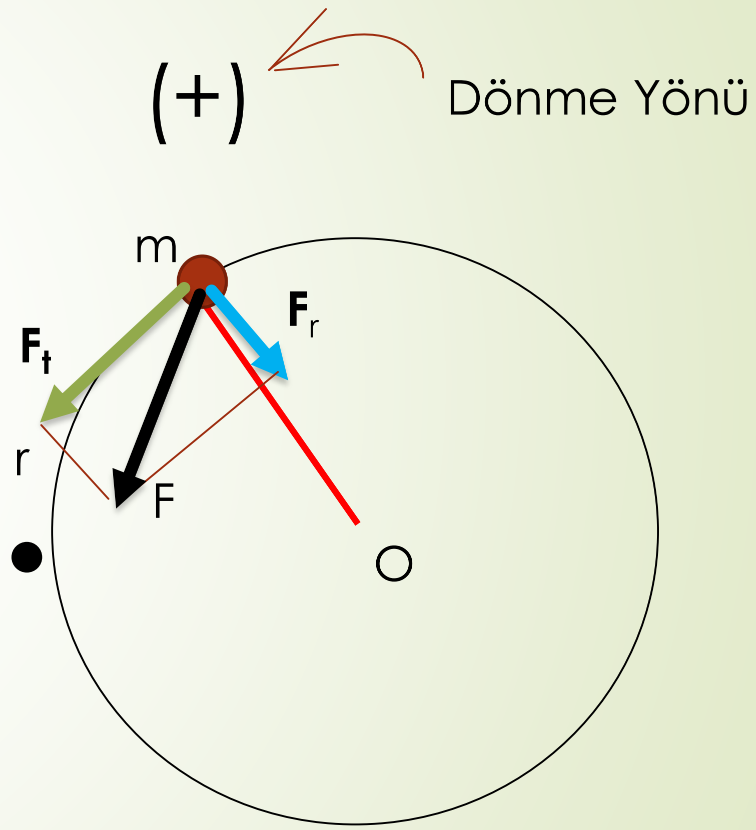
$$F_r = ma_r$$

$$F_t = ma_t$$

İkinci denklem r ile çarpılır ve teğetsel ivme yerine yazıldığında :

$$\tau = rF_t = mr^2\alpha$$

$$\boxed{\tau = I\alpha}$$



Dönme Hareketinde İş-Enerji Teoremi

Sabit bir eksen etrafında bir cismin dönmesi durumunda dış kuvvetler tarafından yapılan iş, dönme kinetik enerjisindeki değişime eşittir;

$$\boxed{W = \frac{1}{2} I(\omega^2 - \omega_0^2)}$$