Aritmetik Ortalama

> Aritmetik ortalama, bir serideki gözlem değerleri toplamının, toplam gözlem sayısına bölünmesiyle elde edilir.

Aritmetik ortalama, sayısal değişkenler için en yaygın olarak kullanılan merkezi eğilim ölçüsüdür. Fakat böyle olmasına rağmen, temsil ettiği dağılımı tam olarak yansıtamamaktadır. Çünkü aritmetik ortalama, bir dağılımda çok küçük ve çok büyük değerler olduğunda, bundan olumsuz etkilenmektedir. Örneğin, ücret ortalamaları hesaplanacak 10 işçiden 9'unun aylık ücreti 400 birim civarındayken, birinin ücreti 1200 birim olsa, bu işçinin ücreti ortalamayı yüksek gösterir yani diğer işçiler olduğundan daha fazla ücret alıyor görünür.

İstatistiksel hesaplamalarda seriler; basit seriler, sınıflanmış seriler ve gruplanmış seriler olarak üç değişik biçimde kullanıldığından, aritmetik ortalamanın hesaplanması her seri için ayrı olarak yapılacaktır.

Bilindiği gibi, örnek Kitle, ana Kitle özelliklerini yeterli düzeyde temsil ettiğine inanılan birimlerden oluşturulan ve ana Kitle özellikleri hakkında tahminlerde bulunmak için kullanılan bir ana Kitle alt kümesidir. Bu nedenle, özünde aynı olsa da, ana Kitle ortalamasının ve örnek Kitle ortalamasının hesaplanmasında kullanılan kavramlar ve simgelerde farklılıklar vardır.

Örnek Kitle Aritmetik Ortalaması

Bir örnek Kitlenin aritmetik ortalamasını bulmak için kullanılan formül;

$\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ şeklindedir.

Formülde kullanılan simgeler

$\bar{X}$: Örnek Kitle ortalaması

X_i : Serideki tüm değerler

Σ : Toplam işareti

$\sum_{i=1}^{n} X_i$: Serideki değerlerin toplamı

n : Örnek Kitleyi oluşturan değer sayısı

Örnek Kitlenin aritmetik ortalamasına istatistik denildiği ve istatistiğin, örnek Kitlenin ölçülebilir bir özelliği olduğu daha önceden belirtilmişti.

Ana Kitle Aritmetik Ortalaması

Bir ana kitle ortalamasının bulunmasında kullanılan formül;

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N}$$ şeklinde gösterilir.

Formülde kullanılan simgeler

$\overline{X}$: Ana kitle ortalaması

X_i : Serideki tüm değerler

Σ : Toplam işareti

$\sum_{i=1}^{n} X_i$: Serideki değerlerin toplamı

N : Ana Kitleyi oluşturan değerlerin sayısı

Ana Kitlenin aritmetik ortalamasına parametre denildiği ve parametrenin ana Kitlenin ölçülebilir bir özelliği olduğu da daha önce belirtilmişti.

Örnek Kitlenin ve ana Kitle aritmetik ortalamasının bulunmasıyla ilgili olarak yukarıda gösterilen formüller, bu bölümde kullanılacaktır.

Ağırlıklı Aritmetik Ortalama

Aritmetik ortalama, bir serideki tüm değerlerin eşit öneme sahip olduğu kabul edilerek bulunmaktadır. Ama, bazı değerler diğer değerlerden daha fazla öneme sahip olabilir. Böyle durumlarda, ağırlıklı aritmetik ortalama kullanılır. Üniversite sınavlarında puanların hesaplanmasında ağırlıklı aritmetik ortalama kullanılmaktadır. Ağırlıklı ortalama, tartılı ortalama olarak da adlandırılmaktadır.

Örnek

Bir öğrencinin dört dersten aldığı notlar; Matematik 60, Türkçe 50, Müzik 70, Beden eğitimi 80'dir. Bu okulda bu derslerin kredileri (ağırlıkları) sırasıyla 4, 5, 2 ve l'dir. Bu öğrencinin ağırlıklı not ortalamasını bulalım.

Çözüm

Ağırlıklı aritmetik ortalamanın formülü;

$$\overline{X} = \frac{X_1 w_1 + X_2 w_2 + \ldots X_n w_n}{w_1 + w_2 + w_n}$$ şeklindedir.

Formülde kullanılan w_n tüm değerlerin ağırlıklarını simgelemektedir. Örnekte verilen değerler formüldeki yerine konarak hesaplama yapılır:

$$\overline{X} = \frac{60.4 + 50.5 + 70.2 + 80.1}{4 + 5 + 2 + 1} = \frac{240 + 250 + 140 + 80}{12} = \frac{710}{12} = 59{,}16.$$

Eğer, öğrencinin aldığı notların ortalaması ağırlıksız hesaplansaydı;

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{60+50+70+80}{4} = 65 \text{ olurdu.}$$

Görüldüğü gibi, ağırlıklı ortalama, şıkları farklı değerlere sahip bir değişkenin gerçek değerinin hesaplanmasında çok büyük bir öneme sahiptir.

Örnek

Bir hazır giyim atölyesinde üretilen takım elbiselerin 50 tanesi 300 TL'den, 60 tanesi 250 TL'den, 80 tanesi 175 TL'den satılmıştır. Bu takım elbiselerin ağırlıklı ortalamasını bulalım.

Çözüm

Verilen değerler, $\bar{X} = \dfrac{X_1 w_1 + X_2 w_2 + \dots X_n w_n}{w_1 + w_2 + w_n}$ ağırlıklı ortalama formülündeki yerine konulursa

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i m_i}{\sum_{1}^{n} f_i = N} = \frac{\Sigma f_i m_i}{N} = \frac{1193}{56} = 59,65 = \frac{300 \times 50 + 250 \times 60 + 175 \times 80}{50+60+80}$$

$$= \frac{15000+15000+14000}{190} = \frac{44000}{190} = 231,57 \text{ TL bulunur.}$$

Basit Serilerde Aritmetik Ortalama

Basit serilerde aritmetik ortalamanın formülü;

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N} \text{ şeklindedir.}$$

Formülde kullanılan simgeler;

$\bar{X}$: Ana Kitle ortalaması

$\sum_{i=1}^{n} X_i$: Serideki değerlerin toplamı

N : Toplam değer sayısıdır.

Örnek

Bir öğrencinin 8 dersten aldığı notları; 75, 75, 72, 80, 78, 69, 71, 88 ise, bu notların aritmetik ortalamasını bulalım.

Çözüm

Öğrencinin derslerinden aldığı notları oluşturan küme, ana Kitle olarak kabul edildiğinden, hesaplamada ana Kitle aritmetik ortalamasının bulunmasıyla ilgili formül kullanılır:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N} = \frac{75 + 75 + 72 + 80 + 78 + 69 + 71+88}{8} = \frac{608}{8} = 76.$$

Sınıflanmış Serilerde Aritmetik Ortalama

Sınıflanmış serilerde aritmetik ortalama; $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} fX_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i = N}$ şeklindedir.

Formülde kullanılan simgeler:

$\bar{X}$: Aritmetik ortalama

$\sum_{i=1}^{n} fX_i$: Tüm değerlerin frekanslarla çarpımlarının toplamı

N : Toplam değer sayısıdır.

Örnek

Bir sınıftaki öğrencilerin ağırlıkları; 55, 58, 62, 70, 48, 55, 58, 48, 70, 70, 55, 48, 62, 62, 62, 58, 58, 62, 70, 62 ise, bu sınıfın ağırlık ortalamasını bulalım.

Çözüm

Önce verilen serilerdeki ağırlık değişkeninin şıkları belirlenip frekansları saptanır. Daha sonra şıklarla frekanslar çarpılarak jXsütunu oluşturulur. Bu sütundaki değerlerin toplamı, toplam frekans sayısına bölünerek, aritmetik ortalama bulunur (Çizelge 5.7.). En sonunda çizelgedeki veriler formüldeki yerlerine konur. Sınıftaki öğrencilerin ağırlıklarından oluşan küme, ana Kitle olarak kabul edildiğinden, hesaplamada ana Kitle ortalamasının bulunmasında kullanılan formül kullanılır.

Çizelge 5.7. Öğrencilerin Toplam Ağırlıkları

X_i **(Ağırlık)**	$H = \dfrac{N}{\sum \dfrac{1}{X_i}} =$ **(Frekans)**	fX_i **(Frekans X Ağırlık)**
48	3	144
55	3	165
58	4	232
62	6	372
70	4	280
Toplam	20	1193

$$= \frac{2}{\frac{2+3}{300}} = \frac{2}{\frac{5}{300}} = \frac{2}{1} x \frac{300}{5} = \frac{600}{5} = 120$$

Çizelgede hesaplanan değerler formüldeki yerlerine konur;

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} fX_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i = N} = \frac{\Sigma f_i X_i}{N} = \frac{1193}{56} = 59,65$$

Gruplanmış Serilerde Aritmetik Ortalama

Gruplanmış serilerde aritmetik ortalama:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i m_i}{\sum_{1}^{n} f_i = N} = \frac{\Sigma f_i m_i}{N}$$ formülüyle gösterilir. Formülde kullanılan simgeler:

$\bar{X}$: Aritmetik ortalama

$\sum_{i=1}^{n} f_i m_i$: Orta noktaların frekanslarla çarpımı

N : Toplam değer sayısı

Örnek

Mevcudu 56 olan bir sınıftaki öğrencilerin boylan ölçülüp gruplanmıştır. Çizelge 3.2.'deki verilere göre bu sınıfın boy ortalamasını hesaplayalım.

Çözüm

Çizelge 3.2. Öğrencilerin Gruplanmış Boy Uzunlukları

Gruplanmış Boy Uzunlukları (X_i)	Frekanslar (f_i)
150-155 den az	8
155-160 * *	12
160-165 * *	20
165-170 * *	10
170-175 * *	6
Toplam	56

Sınıftaki öğrencilerin boylarına ait değerlerin oluşturduğu küme ana Kitle olarak kabul edildiğinden, hesaplamada ana Kitle aritmetik ortalamasının bulunmasıyla ilgili formül kullanılır.

Önce sınıf orta noktalan bulunup frekanslarla çarpılır. Sonra toplamları bulunup frekans toplamına bölünür (Çizelge 5.8.). Çizelgede hesaplanan değerler formüldeki yerlerine konur:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i m_i}{\sum_{1}^{n} f_i = N} = \frac{\Sigma f_i m_i}{N} = \frac{9070}{56} = 161,96 \approx 162.$$

Çizelge 5.8. Grup Orta Noktaları ve Frekanslarla Çarpımı

Boy Uzunluğu Grupları (X_i)	Frekanslar (f_i)	Orta Nokta (m_i)	fm_i
150-155 den az	8	(150 +155) -¡-2= 152,5	1220
155-160 * *	12	(155 +160) + 2= 157,5	1890
160-165 * *	20	(160 + 165)+ 2= 162,5	3250
165- 170 * *	10	(165+ 170)+ 2= 167,5	1675
170-175 * *	6	(170+ 175)+ 2= 172,5	1035
Toplam	56		9070

Aritmetik Ortalamanın Özellikleri

Çok geniş bir kullanım alanına sahip aritmetik ortalamanın birçok özellikleri vardır. Bu özellikler şunlardır:

1. Aralık/oranlı ölçeklerle gösterilen her serinin bir aritmetik ortalaması vardır; ağırlıklar, gelirler, giderler vb.

2. Bir serinin ortalamasının bulunmasında, bu serideki tüm değerler ortalamaya dahil edilir.

3. İki veya daha fazla serinin karşılaştırılmasında aritmetik ortalamanın çok büyük bir önemi vardır.

4. Bir serideki değerlerin aritmetik ortalamadan farklarının cebirsel toplamı sıfırdır. Bu şöyle gösterilir:

$$\sum(X-\overline{X})=0$$

Aritmetik ortalamanın bu özelliğini aşağıdaki seri üzerinde gösterelim.

Bir öğrencinin 5 dersten aldığı notlar sırasıyla 4, 6, 8, 5, 7'dir. Önce serinin aritmetik ortalaması bulunur:

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{N}=\frac{4+6+8+5+7}{5}=\frac{30}{5}=6$$

Sonra, her değerden ortalama çıkartılarak, cebirsel farklar bulunur. Bu farklar toplandığında, toplamın sıfır olduğu görülür. Bu işlemler Çizelge 5.9.'de gösterilmektedir.

Çizelge 5.9. Serideki Değerlerin Aritmetik Ortalamadan Sapmalarının Sıfır Olduğunu Gösteren Çizelge

Değerler X_i	**Farklar (** X_i **-** $\overline{X}$ **)**
4	-2
6	0
8	2
5	-1
7	1
TOPLAM	0

5. Bir seriyi oluşturan her bir değerin aritmetik ortalamadan farklarının karelerinin toplamı minimumdur. Yani, her bir değerin aritmetik ortalama dışındaki herhangi bir değerden farklarının karelerinin toplamı, ortalamadan farklarının karelerinden büyüktür.

Çizelge 5.10. Serideki Her Bir Değerin Aritmetik Ortalamayla Farklarının Karelerinin Toplamlarını Gösteren Çizelge

Değerler X_i	**Farklar** **(** X_i **-** $\overline{X}$ **)**	**Farkların Kareleri** $(X_i-\overline{X})^2$
4	-2	4
6	0	0
8	2	4
5	-1	1
7	1	1
Toplam	0	10

Yukarıda açıklanan dördüncü özellikte kullanılan değerlerle bu özelliği de açıklayalım:

Ortalamadan farkların karelerinin toplamı minimum olduğundan, başka bir değerden sapmaların karelerinin toplamı daha büyüktür. Bunu gösterebilmek için, önce her bir değerle aritmetik ortalamanın farklarının kareleri bulup toplanır. Bu işlem sonucunda, bu değerin 10 olduğu Çizelge 5.10.'de görülmektedir.

Bu kez serinin her bir değeriyle, aritmetik ortalamadan daha büyük bir sayı olan 7 arasındaki farkın karelerinin toplamını buluruz. Çizelge 5.9.'da görüldüğü gibi, bu sonuç 15 olup, söz konusu değerlerin aritmetik ortalamadan farklarının karelerinin toplamından büyüktür. Bu durum, aritmetik ortalamanın beşinci özelliğini doğrulamaktadır.

Çizelge 5.11. Serideki Her Bir Değerle 7 Arasındaki Farkların Karelerinin Toplamını Gösteren Çizelge

Değerler X_i	**Farklar** **(** X_i **-** $\bar{X}$ **)**	**Farkların Kareleri** $(X_1 - \bar{X})^2$
4	-3	9
6	-1	1
8	1	1
5	-2	4
7	0	0
Toplam		15

Bu kez, her bir değerle aritmetik ortalamadan daha küçük bir değer olan 4'ün farkının karelerini bulup toplayalım (Çizelge 5.12.).

Çizelge 5.12. Serideki Her Bir Değerle 4 Arasındaki Farkların Karelerinin Toplamını Gösteren Çizelge

Değerler $\bar{X}$	**Farklar** **(** X_i **-** $\bar{X}$ **)**	**Farkların Kareleri** $(X_1 - \bar{X})^2$
4	0	0
6	2	4
8	4	16
5	1	1
7	3	9
Toplam		30

Çizelgede görüldüğü gibi, her bir değerle aritmetik ortalamadan küçük olan 4 arasındaki cebirsel farkların kareleri toplamı da söz konusu değerlerin aritmetik ortalamayla farklarının karelerinin toplamından büyük çıkmıştır.

Sonuç olarak, yukarıdaki üç çizelgede gösterilen işlemler, her bir değerle aritmetik ortalama arasındaki farkların karelerinin toplamının minimum olduğunu göstermektedir.

Geometrik Ortalama

Geometrik ortalama, bir seriyi oluşturan tüm değerlerin birbiriyle çarpılıp, değer sayısı kadar dalünün alınmasıyla bulunan ortalamadır.

Geometrik ortalama, bir serideki aşırı değerlerden aritmetik ortalama kadar etkilenmediğinden, aşırı büyük veya aşırı küçük değerlere sahip serilerin ortalamasının bulunmasında kullanılmaktadır. Geometrik ortalama, genellikle yüzdelerin, oranların, indeks sayılarının ve bir noktayla diğer bir nokta arasındaki süreci kapsayan yıllık oranların bulunmasında kullanılır. (Örneğin, 1980'le 1990 arası).

Bir seriyi oluşturan tüm değerlerin birbiriyle çarpılıp, değer sayısı kadar dalünün alınmasıyla bulunan geometrik ortalamanın formülü;

$GO = \sqrt[n]{X_1.X_2.X_3....X_n}$ şeklindedir.

Örnek

Bir öğrencinin 3 dersten aldığı notlar; 85, 82, 15 ise, bu notların geometrik ortalaması:

$GO = \sqrt[3]{85.82.15} = \sqrt[3]{104550} = 47{,}1$ bulunur.

Geometrik ortalamanın diğer uygulamasında, satışlardaki, gelirlerdeki ve giderlerdeki Geometrik ortalamanın diğer uygulamasında, satışlardaki, gelirlerdeki ve giderlerdeki değerlerin bir dönemden diğer bir döneme kadar meydana gelen artışların yüzdesi hesaplanır. Geometrik ortalama hesaplama formülü aşağıdaki gibidir.

$$GO = \left[\sqrt[n-1]{\frac{\text{Son değ.}}{\text{İlk değ.}}}\right] - 1$$

Örnek

Bir işletmenin 2000 yılındaki satış miktarı 8 birim, 2004'deki satış miktarı 128 birimdir. İşletmenin bu iki dönem arasındaki yıllık satış miktarı artış yüzdesi:

$GO = \left[\sqrt[5-1]{\frac{128}{8}}\right] - 1 = (\sqrt[4]{16}) - 1 = 1$ bulunur.

Bulunan bu değer 100'le çarpıldığında 100 bulunur. Bu işletmenin yıllık satış miktarı artışı %100 demektir.

Harmonik Ortalama

Harmonik ortalama, bir serideki değer sayısının, serideki tüm değerlerin terslerinin toplamına bölünmesiyle bulunan ortalamadır.

Harmonik ortalama, oransal olarak verilen değerlerin hesaplanmasında kullanılmaktadır. Uzaklık sabit olduğunda hız ortalamasının hesabında, harcanan para sabit olduğunda satın alınan malın fiyat ortalamasının hesabında, zaman sabit olduğunda verimlilik ortalamasının hesabında kullanılmaktadır. Bir seride sıfır varsa ve değerlerin işaretleri farklıysa, harmonik ortalama kullanılmaz.

Harmonik ortalama formülü;

$$H = \frac{N}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + \dots \frac{1}{X_n}} = \frac{N}{\sum \frac{1}{X_i}}$$ şeklindedir.

Örnek

Bir tüketici bir marketten litresini 4 liradan aldığı bir teneke yağı, bir ay sonra litresini 5 liradan almıştır. Bu tüketiciye yağın litresinin ortalama kaç liraya geldiğini bulalım.

Çözüm

Burada hacim sabit olup, her iki alışverişteki fiyat farklıdır. Veriler formüldeki yerine konulursa

$$H = \frac{N}{\sum \frac{1}{X_i}} = \frac{2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}} = \frac{2}{\frac{5+4}{20}} = 4,44$$ TL bulunur.

Kareli Ortalama

Kareli ortalama, bir serideki tüm değerlerin toplamının serideki değer sayısına bölümünün karekökünün alınmasıyla bulunan ortalamadır.

Kareli ortalama, aritmetik ortalamadan sapmaların bir ölçüsü olan standart sapmanın hesaplanmasında kullanıldığından ve negatif değerleri de dikkate aldığından, çok büyük bir öneme sahiptir. Kareli ortalamanın basit serilerdeki, tasnif edilmiş serilerdeki ve gruplanmış serilerdeki formülleri aşağıda gösteril-miştir. Burada sadece basit serilerdeki formüle uygun bir örnek verilecek, sınıflanmış ve gruplanmış serilerle ilgili örnekler dağılım ölçülerinde verilecektir.

Örnek

Beş günlük satışları 2, 3, 1,9, 10 birim olan bir satış noktasının günlük satış miktarını kareli ortalama cinsinden hesaplayalım.

Çözüm

X_1	X_2
2	4
3	9
7	49
9	81
10	100
Toplam	243

Önce serideki değerlerin kareleri bulunup, bu değerler toplanır. Sonra, değerler formüldeki yerlerine konarak hesaplama yapılır.

$$KO = \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{243}{5}} = \sqrt{48,6} = 6,97$$

$$Q_{\frac{23}{100}} \left(n+1\right).\frac{P}{100} = (20+1).\frac{90}{100} = (21).(0,9) = 18,91/4.$$

Kareli ortalamanın sınıflanmış serilerdeki formülü: $KO = \sqrt{\frac{\sum fX_i^2}{N}}$

Kareli ortalamanın gruplanmış serilerdeki formülü: $KO = \sqrt{\frac{\sum fm_i^2}{N}}$

Parametrik Olmayan Ortalamalar

Parametrik olmayan ortalamalar; Tepe değeri, Ortanca ve Kantillerdir. Bu ortalamaların hesaplanmasında serideki tüm değerler kullanılmaz. Bu nedenle ana Kitleyi her zaman tam ve doğru olarak yansıtamazlar.

Tepe Değeri (Mod)

Tepe değeri, bir seride en çok yinelenen değerdir. Yani frekansı diğer değerlerin hiçbirisi tarafından aşılamayan değerdir.

Tepe değeri, ortalamalar arasında seriyi en iyi temsil eden dağılım ölçüsüdür ve isimsel ölçeklerde, sıralı ölçeklerde, aralık ölçeklerde ve oranlı ölçeklerde kullanılır. Örneğin, yeni ürün tipleriyle ilgili olarak yapılan bir araştırmada, hangi ürün tipinin tercih edileceği, tepe değeriyle belirlenir. Tepe değeri, mod olarak da adlandırılmaktadır.

Örnek

Kodları A, B, C, D, E olan beş ürün tipinden hangisinin tercih edileceği 100 tüketici üzerinde sınanmış ve her ürün tipinin kaç kişi tarafından tercih edildiği Çizelge 5.13.'de bir frekans dağılımı biçiminde verilmiştir. Bu dağılımın tepe değerini bulalım.

Çözüm

Çizelge 5.13. Tercih Edilen Ürün Tipleri

Ürün Tiplerinin Kodu (X_1)	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	
Frekanslar (f_1)	**11**	**16**	**25**	**36**	**12**	$\sum$ **100**

Bu dağılımda en çok tercih edilen ürün tipi D olduğundan, bu dağılımın tepe değeri 36'dır.

Örnek

Çizelge 5.14.'de, bir işyerindeki 80 işçinin çalışma süreleri, önce gruplanmış, daha sonra da frekansları saptanarak verilmiştir. Bu verilere göre serinin tepe değerini bulalım.

Çözüm

Çizelge 5.14. İşçilerin Çalıştıkları Yılların Sınıfları ve Frekansları

Gruplandırılmış Yıllar (X_1)	1-5	6-10	11-15	16-20	
Frekanslar (f_1)	12	16	38	14	$\sum$ 80

Çizelgedeki verilere göre, önce tepe değerinin içinde bulunduğu grup bulunur. Tepe değeri grubunun bulunabilmesi için, frekanslar birikimli frekanslara dönüştürülür. Yani, her frekans bir sonraki frekansla toplanır. Çizelge 5.15.'de frekanslar birikimli frekanslara dönüştürülmüştür.

Çizelge 5.15. Sınıflandırılmış Yıllara Ait Birikimli Frekanslar

Gruplandırılmış Yıllar (X_1)	**Frekanslar (f_1)**	**Birikimli Frekanslar(B f_1)**
1-5	12	12
6-10	16	28
11-15	38	66
16-20	14	80
Toplam	80	

Tepe değeri grubu = $\frac{N}{2} = \frac{80}{2} = 40$. sıradaki değeri kapsayan 11-15 grubudur

Bu seriye ait tepe değerinin 40. sıradaki değer olduğu ve 11- 15 grubunun içinde bulunduğu belirlendi. Şimdi formül kullanılarak tepe değeri bulunabilir.

Tepe değeri formülü;

$TD = \iota_a + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}.h$ şeklindedir.

Formüldeki simgeler;

ι_a : Tepe değeri sınıfının alt sınırı (11)

Δ_1 : Tepe değeri grubunun frekansı ile ondan önceki sınıfın frekansı arasındaki fark (22)

Δ_2 : Tepe değeri grubunun frekansı ile ondan sonraki sınıfın frekansı arasındaki fark (24)

h : Sınıf genişliği (5)

Çizelgedeki değerler formüldeki yerlerine konarak tepe değeri bulunur.

Tepe değeri = $TD = \iota_a + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}.h = 11 + \frac{22}{22+24}.5 = 13,391$ yıldır.

Ortanca (Medyan)

Ortanca, büyükten küçüğe ya da küçükten büyüğe doğru sıralanmış bir serideki değerlerin tam ortasında olup, seriyi iki eşit parçaya bölen değerdir.

Ortanca, sıralı veriler için en iyi merkezi dağılım ölçüsüdür. Çünkü sıralı verilerde değerlerin sıralanması dikkate alınmaktadır. Bir serideki çok büyük ve çok küçük değerlerden etkilenmediğinden, böyle serileri aritmetik ortalamadan daha iyi temsil etmektedir. Simetrik dağılımlarda aritmetik ortalama ve ortanca birbirine yakındır. Sıralı ölçeklerde, aralık ölçeklerde ve oranlı ölçeklerde kullanılır. Ortanca, medyan olarak da adlandırılmaktadır.

Matematiksel işlemlere elverişli olmayışı, sürekli serilerde yaklaşık olarak hesaplanabilmesi, ortancanın olumsuz yönleridir.

Basit Serilerde Ortanca

Basit serilerde ortanca bulunurken, öncelikle, seriyi oluşturan birimler büyüklük sırasına konur, sonra tam ortadaki birim belirlenir. Bir serideki değerlerin tam ortasındaki değer ortancadır. Fakat seride çift sayıda değer varsa, tam ortadaki iki değerin ortalaması ortanca olarak kabul edilir.

Örnek

Değerleri 2, 6, 5, 6, 7, 6, 3, 5 olan serinin ortancasını bulalım.

Çözüm

Bir serinin ortancasının bulunmasında, önce serideki birimler küçükten büyüğe doğru sıraya konur:

2, 3, 5, 5, 6, 6, 6, 7

Seride çift sayıda birim olduğundan, ortadaki iki birim olan 5 ve 6 toplanarak ikiye bölünür:

Ortanca $= \frac{5+6}{2} = 5,5$ bulunur.

Sınıflandırılmış Serilerde Ortanca

Sınıflandırılmış serilerde ortanca bulunurken, serideki birimler önce büyüklük sırasına konur, sonra toplam frekans sayısı ikiye bölünüp, kaçıncı birimin ortanca olduğu saptanır. Daha sonra birikimli frekanslar yardımıyla ortanca bulunur.

Örnek

Aşağıdaki serinin ortancasını bulalım.

X_i	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
f_i	4	6	9	17	19	8	7	5	3	3	2	183

Önce frekansların birikimli frekansları bulunur (Çizelge 5.16.).

Çizelge 5.16. Serinin Gerçek ve Birikimli Frekansları

X_i	Frekans (f_i)	Birikimli Frekanslar (B f_i)
20	4	4
21	6	10
22	9	19
23	17	36
24	19	55
25	8	63
26	7	70
27	5	75
28	3	78
29	3	81
30	2	83
Toplam	83	

Seride 83 birim olduğuna göre $\frac{N+1}{2} = \frac{83+1}{2} = 42$ olduğundan, 42. terimin değeri ortancayı verecektir. 42'yi kapsayan birikimli frekans 55 olduğundan, bu sayının karşısındaki 24, serinin ortancasıdır.

Gruplandırılmış Serilerde Ortanca

Gruplandırılmış serilerde ortanca, birikimli frekanslar yardımıyla bulunur. Fakat böyle serilerde ortanca bir grup içinde olduğundan, önce ortanca grıibu bulunmalıdır.

Örnek

Bir işyerinde çalışan 36 işçiye, işyerinde kaç yıl çalıştıkları sorulmuş ve elde edilen ham veriler sınıflanmıştır. Bu sınıfların frekansları ve birikimli frekanstan hesaplanarak, Çizelge 5.17. elde edilmiştir. Bu verilerin ortancasını bulalım.

Çizelge 5.17. Serinin Gerçek ve Birikimli Frekansları

Gruplar (X_i)	Frekanslar (f_i)	Birikimli Frekanslar (B f_i)
0- 4 den az	4	4

4-8 * *	6	10
8-12* *	9	19
12-16* *	5	24
16-20* *	12	36
Toplam	36	

Ortanca = $\iota_a + \dfrac{\dfrac{N}{2} - f_a}{fm}.h$

Formüldeki simgeler:

ι_a : Ortanca grubunun alt sınırı (8)

N : Frekans toplamı (L/,) (36)

f_a : Ortanca grubundan önceki grupların toplamı (10)

fm, : Ortanca grubunun frekansı (9)

h : Ortanca grubunun aralığı (4)

Çözüm

Önce ortancanın içinde bulunduğu grup bulunur:

Ortanca grubu = $\dfrac{N}{2} = \dfrac{36}{2} = 18$ dır.

Ortanca, 18. sıradaki terimdir ve 8- 12'den az grubunun içinde bulunmaktadır. Çizelgedeki veriler formüldeki yerine konur:

Ortanca $= 8 + \dfrac{\dfrac{36}{2} - 10}{9}.4 = 8 + \dfrac{18 + 10}{9}.4$

$$= 8 + \frac{8}{9}.4 = \underset{9}{\frac{8}{1}} + \underset{1}{\frac{32}{9}} = \frac{72 + 32}{9}$$

$= \dfrac{104}{9} = 11{,}55 \approx 12$ bulunur.

Kantiller (Çeyrekler)

Kantil, terimleri küçükten büyüğe doğru sıralanmış bir seriyi, ikiye, dörde, ona, yüze bölen merkezi eğilim ölçüleridir.

Bu değerler, ortanca, çeyıeklik (kartil), onluk (deşil) ve yüzlük (persentil) olarak adlandırılır. Bu durumda; bir seri için 1 ortanca, 3 çeyreklik, 9 onluk ve 99 yüzlük hesaplanır. Kantillerin hesaplanmasındaki amaç, serideki birimlerin dörtte, onda, yüzde belirli bir oranının hangi değerin altında, üstünde ya da arasında bulunduğunu belirtmektir. Kantiller genel olarak $Q_{\frac{h}{r}}$ olarak gösterilir:

$Q_{\frac{1}{4}}$: Birinci çeyreklik

$Q_{\frac{3}{4}}$: Üçüncü çeyreklik

$Q_{\frac{4}{10}}$: Dördüncü onluk

$Q_{\frac{23}{100}}$: Yirmi üçüncü yüzlük anlamına gelmektedir.

Verilen bir serinin yüzlük hesabının yapılmasında, önce veriler büyüklük sırasına konur, sonra bulunması istenilen yüzlük bulunur. Bir serinin yüzlük değeri; p

Yüzlük = $(n+1).\frac{P}{100}$ şeklinde bulunur.

Örnek

Büyük bir mağaza, 20 satış elemanı tarafından yapılan satış miktarlarını belirlemiş ve aşağıdaki seriyi oluşturmuştur. Bu serinin; A. 50., B. 80., C. 90. yüzlük değerini bulalım.

9, 6, 12, 10, 13, 15, 16, 14, 14, 16, 17, 16, 24, 21, 22, 18, 19, 18, 20, 17

Önce veriler küçükten büyüğe doğru sıraya konur:

6, 9, 10, 12, 13, 14, 14, 15, 16, 16, 16, 17, 17, 18, 18, 19, 20, 21, 22, 24

A. 50. yüzlük değerin bulunması:

Yüzlük değer = $(n+1).\frac{P}{100} = (20+1).\frac{50}{100} = (21).(0,5) = 10,5$ bulunur.

Böylece serinin küçükten büyüğe doğru sıralanmış değerlerden 10,5'inci sıradaki (10. ve 11. değer arasındaki) değer 50. yüzlük değerdir. Bu değer de 16'dır. Başka bir anlatımla 50. yüzlük değer 16'dır.

B. 80. yüzlük değerin bulunması:

Yüzlük değer = $(n+1).\frac{P}{100} = (20+1).\frac{80}{100} = (21).(0,8) = 16,8$

Böylece serinin küçükten büyüğe doğru sıralanan değerleri içinden 16,8'inci sıradaki (16. ve 17. değer arasındaki) değer 80. yüzlük değerdir. 16. gözlem 19, 17. gözlem 20 olduğuna göre, bu durumda 80. yüzlük değer 19 ile 20 arasında olup 19,8'dir.

C. 90. yüzlük değerin bulunması:

Yüzlük değer = $(n+1).\frac{P}{100} = (20+1).\frac{90}{100} = (21).(0,9) = 18,9$

18,9'uncu sıradaki (18. ve 19. değer arasındaki) değer 90. yüzlük değerdir. Bu da 21,9'dur.

Belirli yüzlük değerler, diğerlerine göre daha büyük bir öneme sahiptir. Çünkü seriyi dört bölüme ayırırlar. Bunlara çeyreklik denir. Birinci çeyrek, ikinci çeyrek, üçüncü çeyrek ve dördüncü çeyrek diye adlandırılırlar.

Birinci çeyrek, 25. yüzlük değerdir. Bu nokta, serinin en düşük 1/4'ini belirtir. Buna benzer olarak, ikinci çeyrek 50. yüzlük değerdir. Bu serideki en önemli noktadır ve ortanca diye adlandırılır. Üçüncü çeyrek ise, 75. yüzlük değerdir. Bu, serinin en yüksek %'ünü belirtir.

Ne Zaman Hangi Merkezi Eğilim Ölçüsü Kullanılır?

Bir seriyi en iyi temsil edebilecek merkezi eğilim ölçüsünü seçerken, değişkenin tipine ve bu değişkene ait değerlerin dağılımına bakılır. Bir serideki değişken değerlerinin dağılımı ya simetrik ya da çarpıktır. Eğer, bir seride aşırı düşük veya yüksek değerler varsa, bu serinin dağılımı simetrik değildir.

Herhangi bir seriyi hangi ortalamanın temsil edeceğini belirlemede kullanılan bazı ölçütler şunlardır:

1. Sadece aralıklı/oranlı değişkeninin aritmetik ortalaması hesaplanabilir. (Elbette aralıklı/oranlı değişkenlerinin tepe değeri ve ortancası da hesaplanabilir).
2. Üç ortalamadan sadece aritmetik ortalamanın hesaplanmasında tüm değerler kullanılır. Bu nedenle aritmetik ortalama, diğer ortalamalara göre, bir seriden daha fazla bilgi elde eder. Bu nedenle aritmetik ortalama, çoğunlukla aralıklı/ oranlı değişkenlerine uygundur.
3. Ortanca, çoğunlukla sıralı değişkenlerden seçilmiş bir ortalamadır. Başka bir anlatımla ortanca, sıralanmış değerlerden oluşturulan bir serinin ortasındaki değerdir ki, solundaki değerler kendisinden küçük, sağındaki değerlerse büyüktür.
4. Ortanca, sadece ısimsel değişkenlerin ortalamasının bulunmasında kullanılır.
5. Bazen bir değişkenle ilgili dağılımın bulunmasında, aritmetik ortalama veya ortanca uygun olmaz. Böyle bir seriye en uygun ortalama, tepe değeridir ve bir serinin gerçek dağılımının bulunmasında yararlı olur21.

Bir çarpık dağılımda, merkezi eğilim ölçülerinden aritmetik ortalama, ortanca ve tepe değerinden ikisi bilindiğinde, diğeri yaklaşık olarak hesaplanır. Bu hesaplamalarda kullanılan formüller şunlardır:

$$TD = \overline{X} - 3(\overline{X} - \text{O})$$

$$\overline{X} = \frac{3(\text{O}) - TD}{2}$$

$$\text{O} = \frac{2(\overline{X}) + TD}{3}$$

Örnek

Bir dağılımın tepe değeri 18, ortancası 19 ise, bu dağılımın aritmetik ortalamasının yaklaşık değeri, aritmetik ortalama formülüyle şöyle hesaplanır:

$$\overline{X} = \frac{3(\text{O}) - TD}{2} = \frac{(3.19) - 18}{2} = \text{19,5}$$

bulunur. ağılımın aritmetik ortalaması yaklaşık olarak 19,5'dir. Aritmetik ortalamanın ortancadan biraz büyük çıkması, bu dağılımın hafif sağa çarpık bir dağılım olduğunu göstermektedir.