1. TÜREVSEL DENKLEMLER (DİFERANSİYEL DENKLEMLER)

1.1 TANIMLAR VE SINIFLANDIRMA

Tanım:

Bir türevsel denklem bilinmeyen bir fonksiyon ve onun türevlerini içeren bir denklemdir. Genel olarak $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ olarak gösterilebilir.

İktisatta türevsel denklemlerin en yaygın kullanım alanı dinamik analizdir. Dinamik analiz, değişkenlerin zaman içindeki değişimini inceler. Bu nedenle değişkenler zamanın (t) bir fonksiyonu olarak modellenir: $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$.

Sınıflandırma:

I- *Kısmi-bayağı türevsel denklemler*:

Eğer bilinmeyen fonksiyon iki veya daha fazla değişkenin fonksiyonu ise, türevler kısmi türev olacaktır. Bu durumda türevsel denklem **kısmi türevsel denklem**dir**.**

Eğer bilinmeyen fonksiyon tek bir değişkenin fonksiyonu ise türevler basit türevlerdir ve denkleme **bayağı türevsel denklem** adı verilir.

II- *Denklemde yer alan en yüksek türev derecesi*:

Denklemde yer alan en yüksek türev derecesi denklemin sırasını (derecesini) belirler. Eğer en yüksek türev derecesi 1 ise bu denkleme **birinci sıra** (derece) türevsel denklem, 2 ise **ikinci sıra** türevsel denklem … denir.

III- *Doğrusallık*:

Herhangi bir n. sıra türevsel denklem için, eğer y ve $\frac{d^n y}{dt^n}$ ifadeleri denkleme doğrusal olarak giriyorsa bu denkleme **doğrusal** (lineer) **türevsel denklem** adı verilir:

$$a_0(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)y = g(t)$$

Burada a_i katsayıdır (i=0…n) ve zamanın (t) bir fonksiyonudur. Bu denklemin özel bir hali a_i katsayılarının birer sabit olması durumudur ve **sabit katsayılı n. sıra türevsel denklem** olarak adlandırılır.

Ayrıca eğer g(t) = 0 ise denklem **homojen** (türdeş), g(t) ≠ 0 ise **homojen olmayan türevsel denklem**dir.

$\frac{d^n y}{dt^n}$ ve y ifadelerinin denkleme doğrusal olarak girmediği durumlarda **doğrusal olmayan türevsel denklem** söz konusudur.

Çözüm:

Bu tür denklemlerin çözümü, denklemi ($\frac{dy}{dt} = f(t,y)$) sağlayan fonksiyonun (y(t)) bulunması, diğer bir deyişle, yerine konulduğunda türevsel denklemi özdeşliğe çeviren fonksiyonun (bilinmeyen fonksiyonun) bulunmasıdır.

Örnek: $\frac{dy}{dt} + 2t + y = 0$ türevsel denkleminin bir çözümü y = 2 - 2t'dir. (Çünkü denklemde yerine koymak üzere türevini alırsak dy/dt = -2 ve bunu denklemde yerine koyarsak -2 + 2t + 2 - 2t = 0 sağlanır)

Ancak bu tek çözüm değildir. Örneğin y = 2 - 2t + $5e^{-t}$ de bu denklemi sağlar. (Çünkü dy/dt = -2 - $5e^{-t}$, denklemde yerine koyarsak -2 - $5e^{-t}$ + 2t + 2 - 2t + $5e^{-t}$ = 0 denklemi sağlar.

Daha genel olarak, y = 2 - 2t + ce^{-t} şeklinde bir fonksiyon, c'nin tüm değerleri için türevsel denklemi sağlar. Bu şekilde rasgele sabit içeren çözümler **genel çözüm** olarak adlandırılır. Genel çözümlerin özel halleri (örneğin önceki örnekte c = 5 olması durumu) özel çözüm olarak adlandırılır.

Özel çözümlerden birisi, özel bir öneme sahiptir. Bu da t = 0 olduğu durumu, yani başlangıç koşullarını içeren durumdur. Önceki örnekte genel çözüm y(t) = 2 - 2t + ce^{-t} demiştik. t = 0 iken y'nin aldığı değer, yani y'nin başlangıç değeri y(0) = 2 + c'dir. Böylece c sabitini y(0) başlangıç koşulları cinsinden yazabiliriz: c = y(0) – 2. Bunu genel çözümde yerine koyarsak y(t) = 2 - 2t + (y(0) - 2)e^{-t} **belirli çözüm** olarak adlandırılır. Hatta eğer başlangıç değerini biliyorsak örneğin y(0) = 1 ise y(t) = 2 - 2t - e^{-t} belirli çözümdür.

ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

1.2 DOĞRUDAN İNTEGRAL ALMA

$\frac{dy}{dt} = f(t)$ şeklinde bir fonksiyonun çözümü doğrudan integral alma yöntemiyle bulunabilir:

$$y = \int f(t)dt$$

Buradan elde edilen çözüm bir rasgele sabit içerecektir.

Örnek : $\frac{dy}{dt} = 2t^3$

Genel çözüm: $y(t) = \int 2t^3 dt = 2\frac{1}{4}t^4 + c = \frac{1}{2}t^4 + c$

Kontrol: $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}t^4 + c) = 2t^3$

Belirli çözüm: y(0) = $\frac{1}{2}0^4 + c = c$ Öyleyse, $y(t) = y(0) + \frac{1}{2}t^4$

1.3 DEĞİŞKENLERİN AYRILMASI

Doğrudan integral alma yöntemi, $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ gibi y'yi de içeren denklemleri çözmemize yetmez. Bu tür denklemlerin çözümünde diferansiyellerden yararlanabiliriz.

f(y) = g(t) eşitliğinin iki tarafının da diferansiyelini aldığımızda f'(y)dy = g'(t)dt elde edilir. Bu nedenle iki tarafın integralini alarak çözümü bulabiliriz.

Genel olarak P(y)dy = Q(t)dt gibi bir türevsel denklemin iki tarafının integrali alınırsa $\int P(y)dy = \int Q(t)dt$ çözüm bulunur.

Örnek : $\frac{dy}{dt} = ty$

$\frac{1}{y}dy = tdt, \quad \int \frac{1}{y}dy = \int tdt$

Genel çözüm: $\ln y + c_1 = \frac{1}{2}t^2 + c_2$ veya $\ln y = \frac{1}{2}t^2 + c_3,$ buradan

$y(t) = e^{\frac{1}{2}t^2 + c_3} = ce^{\frac{1}{2}t^2}, \quad c = e^{c_3}$

Kontrol: $\frac{d}{dt}ce^{\frac{1}{2}t^2} = cte^{\frac{1}{2}t^2} = ty$

Belirli çözüm: y(0) = $ce^{\frac{1}{2}0^2} = c$ Öyleyse, $y(t) = y(0)e^{\frac{1}{2}t^2}$

Buraya kadar ele alınan iki yöntem daha karmaşık denklemleri çözmemize yetmez. Bu nedenle daha genel bir yöntem kullanılmalıdır.

1.4 BİRİNCİ SIRA DOĞRUSAL DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMÜ

Birinci sıra bir türevsel denklem en genel haliyle

$K(t)\frac{dy}{dt} + L(t)y = M(t)$ şeklindedir.

Burada K, L ve M t'nin fonksiyonu olan ifadelerdir. Ve her zaman eşitliğin iki tarafını K(t) ile bölüp dy/dt'yi yalnız bırakabiliriz:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{L(t)}{K(t)}y = \frac{M(t)}{K(t)}$$

veya

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = w(t)$$

Burada u(t) = L(t)/K(t) ve w(t) = M(t)/K(t)'dir.

Bu tür denklemlerin genel çözümünü ele almadan önce daha basit bir durumu ele alalım.

I- HOMOJEN DURUM

Bu durum, yukarıdaki denklemde w(t) = 0 olması durumudur:

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = 0$$

Bu sistem şu şekilde tekrar yazılabilir:

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -u(t)$ veya $\frac{1}{y}dy = -u(t)dt$

ayrılabilir değişkenler yöntemiyle,

$\int \frac{1}{y}dy = \int -u(t)dt$, öyleyse $\ln y + c = \int -u(t)dt$

$\ln y = -c - \int u(t)dt$, $y = e^{-c-\int U(t)dt}$ ve $y(t) = Ae^{-\int U(t)dt}$ genel çözümdür.

Belirli çözüm y(0) kullanılarak bulunabilir.

Örnek : $\frac{dy}{dt} + 3y = 0$ ve y(0) = 2 ise genel ve belirli çözümü bulunuz.

Bu örnek olası en basit duruma örnektir: u(t) fonksiyonunun bir sabit olduğu durum.

burada u = 3, $\int u(t)dt = \int 3dt = 3t + c$

Genel çözüm: $\frac{1}{y}dy = -3dt$ olduğundan $\int \frac{1}{y}dy = \int -3dt,$ öyleyse

lny = -3t +c ve $y(t) = Ae^{-3t}$

Belirli çözüm: $y(0) = Ae^0 = A$, $y(t) = y(0)e^{-3t} = 2e^{-3t}$

Örnek : $\frac{dy}{dt} + 3ty = 0$

burada u(t) = 3t, $\int u(t)dt = \int 3tdt = (\frac{3}{2})t^2 + c$

Genel çözüm: $y = Ae^{-\int u(t)dt} = Ae^{-(\frac{3}{2})t^2}$

$y(0) = Ae^0 = A$ olduğundan

Belirli çözüm: $y(t) = y(0)e^{-(\frac{3}{2})t^2}$

II- HOMOJEN OLMAYAN DURUM

a. Sabit katsayılı, sabit terimli birinci sıra türevsel denklemler

Bu durum, u(t) = a ve w(t) = b olması durumudur (a ve b birer sabittir):

$$\frac{dy}{dt} + ay = b$$

Bu denklemin çözümü iki terimin toplamını içerir: *tamamlayıcı fonksiyon* (y_c) ve *özel integral* (y_p). Öyleyse çözüm $y(t) = y_c + y_p$'dir.

Yukarıdaki denklemin homojen halini ($\frac{dy}{dt} + ay = 0$) *indirgenmiş denklem* olarak adlandırırsak, tamamlayıcı fonksiyon, y_c bu indirgenmiş denklemin genel çözümüdür.

Denklemin kendisini ($\frac{dy}{dt} + ay = b$) *toplam denklem* olarak adlandırırsak, özel integral, y_p bu toplam denklemin herhangi bir özel çözümüdür.

Homojen denklemin genel çözümü $y = Ae^{-at}$ bulunmuştu. Öyleyse $y_c = Ae^{-at}$.

Özel integral y_p toplam denklemin herhangi bir özel çözümü olduğundan, öncelikle olası en basit çözümü ele alabiliriz: y = k (k bir sabit). Bu durumda, y bir sabit olduğundan dy/dt = 0 ve toplam denklem $\frac{dy}{dt} + ay = 0 + ak = b$ olur. Böylece k = b/a (a ≠ 0) ve özel integral $y_p = b/a$ olacaktır.

Toplam denklemin genel çözümü:

$$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + \frac{b}{a}$$

Bu çözüm, rasgele bir sabit olan A teriminin varlığı nedeniyle genel çözümdür. Bu sabiti, bir başlangıç koşulu kullanarak belirli hale getirebiliriz.

t = 0 iken $y(0) = Ae^0 + \frac{b}{a}$ öyleyse $A = y(0) - \frac{b}{a}$ ve

toplam denklemin belirli çözümü:

$$y(t) = (y(0) - \frac{b}{a})e^{-at} + \frac{b}{a}$$

Not: Bir y değişkeninin denge durumu, $\frac{dy}{dt} = 0$ olmasıdır. Denge değerini bulmak için $\frac{dy}{dt} = 0$ yaparak kalan denklemi sağlayan y değerini bulmak gerekir. Asıl denklemde ($\frac{dy}{dt} + ay = b$) $\frac{dy}{dt} = 0$ olduğunda $y = \frac{b}{a}$ bulunur. Diğer bir deyişle y'nin denge değeri $\frac{b}{a}$'dır. Daha genel olarak, özel integral $y_p = \frac{b}{a}$, y değişkenin denge değerini verir. Tamamlayıcı fonksiyon $y_c = Ae^{-at}$ ise toplam fonksiyonun zaman içinde bu denge değerinden sapmasını gösterir. Eğer a>0 ise t→∞ iken $y_c = Ae^{-at} \rightarrow 0$ ve $y(t) \rightarrow y_p = \frac{b}{a}$ denge değerine yaklaşır. Bu durumda dengenin istikrarlı olduğu söylenir. Eğer a<0 ise t→∞ iken $y_c = Ae^{-at} \rightarrow c$ ve y(t) → Eğer a>0 ise t→∞ iken $y_c = Ae^{-at} \rightarrow \infty$ ve $y(t) \rightarrow \infty$ denge değerinden uzaklaşır. Bu durumda dengenin istikrarsız olduğu söylenir.

Örnek : $\frac{dy}{dt} + 3y = 6$ ve y(0) = 5 ise genel ve belirli çözümü bulunuz.

İndirgenmiş denklem: $\frac{dy}{dt} + 3y = 0$. Daha önce bunun genel çözümü $y(t) = Ae^{-3t}$ olarak bulunmuştu. Öyleyse tamamlayıcı fonksiyon: $y_c = Ae^{-3t}$.

Özel integrali bulmak için y = k diyelim. Böylece dy/dt = 0 ve toplam denklemden 3k = 6 ve k = 2. Böylece $y_p = 2$ olacaktır.

Genel çözüm: $y(t) = y_c + y_p = Ae^{-3t} + 2$

$y(0) = Ae^0 + 2$ olduğundan A = y(0) - 2 ve

belirli çözüm: $y(t) = (y(0) - 2)e^{-3t} + 2 = (5 – 2)e^{-3t} + 2 = 3e^{-3t} + 2$

Çözümlerin doğrulanması:

Bulunan çözümlerin doğru olup olmadığı her zaman türev alarak denetlenebilir.

Örnek: Önceki örnekte $\frac{dy}{dt} + 3y = 6$ türevsel denkleminin belirli çözümü $y(t) = 3e^{-3t} + 2$ bulunmuştu. Bu denklemin türevi $\frac{d}{dt}(3e^{-3t} + 2) = -9e^{-3t}$ bulunur. Asıl denklemde yerine koyarsak $-9e^{-3t} + 3(3e^{-3t} + 2) = -9e^{-3t} + 9e^{-3t} + 6$ sorudaki gibi 6'ya eşittir.

b. Değişken katsayılı, değişken terimli birinci sıra türevsel denklemler

Daha genel birinci sıra doğrusal denklem $\frac{dy}{dt} + u(t)y = w(t)$ şeklindedir. Bu tür denklemlerin çözümünü bulmak için tam türevsel denklemler ele alınmalıdır.

Tam türevsel denklemler

İki değişkenin fonksiyonu olan F(y,t) için tam türevsel $\mathrm{dF(y,t)} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{dy} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{dt}$ dir.

Bu türevsel 0'a eşitlendiğinde, $\frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial t}dt = 0$ denklemi, "tam türevsel denklem" olarak adlandırılır. Bu denkleme tam türevsel denklem denilmesinin nedeni, sol tarafının F(y,t) denkleminin diferansiyeline tam olarak eşit olmasıdır.

Genel olarak,

Mdy + Ndt = 0

gibi bir türevsel denklem sadece ve sadece $M = \frac{\partial F}{\partial y}$ ve $N = \frac{\partial F}{\partial t}$ özelliğini taşıyan bir F(y,t) denklemi varsa tamdır.

Young teoriemine göre, $\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t}$ dir.

Buradan yola çıkarak, $\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} = \frac{\partial N}{\partial y}$ ve $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t} = \frac{\partial M}{\partial t}$ olduğundan

Mdy + Ndt denklemi, sadece ve sadece $\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y}$ ise tamdır.

Örnek: $\mathrm{tdy} + (\mathrm{y} - \mathrm{t})\mathrm{dt} = 0$ tam mıdır?

Burada M = t, N = y – t, $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{t}} = 1$, $\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{y}} = 1$ eşit olduğundan tamdır.

Çözüm

$dF(y,t) = 0$ türevsel denkleminin genel çözümü, $F(y,t) = c$ (c bir sabit) formunda olacaktır. Bu nedenle, bir tam türevsel denkleminin çözümünü bulmak için $F(y,t)$ ilkel fonksiyonunu bulup onu bir rasgele sabite eşitlememiz gerekir.

Diyelim ki karşımızda $Mdy + Ndt = 0$ gibi bir denklem var ve bunun çözümünü bulmak istiyoruz.

Burada $M = \frac{\partial F}{\partial y}$ olduğundan, F fonksiyonu, M'nin y'ye göre integralini içermelidir:

$F(y,t) = \int Mdy + \psi(t)$

Not: $\frac{\partial F}{\partial y}$ sadece bir kısmi türev olduğundan sadece t'lerin bulunduğu toplamsal bölümleri içermeyecektir. Örneğin, $F(y,t) = 3yt^2 + 2t$ ise $M = \frac{\partial F}{\partial y} = 3t^2$ dir. $\int 3t^2dy = 3t^2y + c$'dir. Burada $c = \psi(t)$'dir yani t'nin fonksiyonu olabilir ve bu örnekte $c = 2t$'dir. Bu durumun nedeni, y'ye göre kısmi türev alırken t'nin sabit olarak alınmasıdır.

M bilindiğinde $\int Mdy$ integrali bulunur. Önemli olan $\psi(t)$ ifadesinin bulunmasıdır. Bunun için $N = \frac{\partial F}{\partial t}$ bilgisi kullanılabilir.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int Mdy + \psi(t)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int Mdy\right] + \psi'(t) = N$$

Öyleyse, $\psi'(t) = N - \frac{\partial}{\partial t}[\int Mdy]$,

$$\psi(t) = \int \psi'(t)\,dt = \int \left\{N - \frac{\partial}{\partial t}\left[\int Mdy\right]\right\} dt$$

Örnek: $tdy + (y - t)dt = 0$ Burada M = t, N = y – t dir ve daha önce tam olduğu gösterilmişti.

Çözüm:

$F(y,t) = \int M dy + \psi(t) = \int t dy + \psi(t) = ty + \psi(t)$

$\frac{\partial F}{\partial t} = y + \psi'(t) = N, \qquad \psi'(t) = N - y = y - t - y = -t$

$$\psi(t) = \int \psi'(t)\, dt = \int -t\, dt = -\frac{1}{2}t^2$$

Öyleyse $F = ty - \frac{1}{2}t^2 = c$, $\qquad y = \frac{\left(c + \frac{1}{2}t^2\right)}{t} = ct^{-1} + \frac{1}{2}t$

Kontrol: $\frac{dy}{dt} = -ct^{-2} + \frac{1}{2}$

Soruda verilen denklem $t\frac{dy}{dt} + (y - t) = 0$ şeklinde yeniden yazılabilir. Denklemde y yerine $ct^{-1} + \frac{1}{2}t$, dy/dt yerine $-ct^{-2} + \frac{1}{2}$ yazarsak

$t(-ct^{-2} + \frac{1}{2}) + \left(ct^{-1} + \frac{1}{2}t - t\right) = (-ct^{-1} + \frac{1}{2}t) + \left(ct^{-1} - \frac{1}{2}t\right)$

soruda olduğu gibi 0’a eşit bulunur.

Tam olmayan türevsel denklemler

Bu yöntem tam türevsel denklemlerin çözümü için kullanıldı. Ancak belli düzenlemelerle, tam olmayan türevsel denklemlerin çözümünde de kullanılabilir. Bunun için kullanılacak kavram *integral faktörü*dür.

Örnek: tdy + (2y+t)dt = 0 fonksiyonu tam mıdır?

M = t, N = 2y+t öyleyse $\partial M/\partial t = 1$, $\partial N/\partial y = 2$ tam değildir.

Fakat her bir terimi t ile çarparsak $t^2dy + (2yt + t^2)dt = 0$

$M = t^2$, $N = 2yt+t^2$ öyleyse $\partial M/\partial t = 2t$, $\partial N/\partial y = 2t$ türevsel denklem tam hale gelir.

Burada t integral faktörü olarak adlandırılır.

Tam olmayan bir türevsel denklem için bir integral faktörü bulunabilirse, denklem tam hale gelir ve önceki yöntemle çözüm bulunabilir.

$t^2dy + (2yt + t^2)dt = 0$

$M = t^2$, $N = 2yt+t^2$

$F(y,t) = \int Mdy + \psi(t) = \int t^2dy + \psi(t) = t^2y + \psi(t)$

$\frac{\partial F}{\partial t} = 2ty + \psi'(t) = N,$ $\psi'(t) = N - 2ty = 2yt + t^2 - 2ty = t^2,$ öyleyse $\psi(t) = \frac{1}{3}t^3$

$F(y,t) = t^2y + \frac{1}{3}t^3 = c,$ $y = \frac{c-\frac{1}{3}t^3}{t^2} = ct^{-2} - \frac{1}{3}t$

Kontrol: $dy/dt = -2ct^{-3} - \frac{1}{3}$

Sorudaki denklem $t^2dy/dt + (2yt + t^2) = 0$ olarak yeniden yazılabilir. Burada y yerine $ct^{-2} - \frac{1}{3}t$, dy/t yerine $-2ct^{-3} - \frac{1}{3}$ yazarsak $t^2(-2ct^{-3} - \frac{1}{3}) + \left(2(ct^{-2} - \frac{1}{3}t)t + t^2\right) = -2ct^{-1} - \frac{1}{3}t^2 + \left(2ct^{-1} - \frac{2}{3}t^2 + t^2\right)$ sorudaki gibi 0'a eşit bulunur.

Homojen olmayan bir birinci sıra doğrusal türevsel denklem

$\frac{dy}{dt} + u(t)y = w(t)$, yeniden düzenlenerek önceki formata sokulabilir:

$dy + (u(t)y – w(t))dt = 0$

bu denklem için integral faktörü I olsun. Öncelikle I'nın bulunması gerekir.

$Idy + I(u(t)y – w(t))dt = 0$, $M = I$, $N = I(u(t)y - w(t))$

$\partial M/\partial t = dI/dt$, $\partial N/\partial y = Iu(t)$ (burada I'nın yalnızca t'nin fonksiyonu olduğu varsayıldı)

$\partial M/\partial t = \partial N/\partial y$ olması için $dI/dt = Iu(t)$ ve $\frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = u(t)$ olmalı.

İki tarafın t'ye göre integrali alınırsa, $\int \frac{1}{I}\frac{dI}{dt}dt = \int u(t)dt$, veya $\int \frac{1}{I}dI = \int u(t)dt$

Buradan, $\ln(I) + c = \int u(t)dt$, veya $I = e^{\int u(t)dt-c}$, $I = Ae^{\int u(t)dt}$

Burada $A = e^{-c}$ rasgele bir sabittir ve 1'e eşit kabul edildiğinde de I tamlığı sağlar. Bu nedenle $A = 1$ kabul edip $I(t) = e^{\int u(t)dt}$ kabul edilebilir. Böylece türevsel denklem $e^{\int u(t)dt}dy + e^{\int u(t)dt}(u(t)y – w(t))dt = 0$ tamdır.

İspat: $M = e^{\int u(t)dt}$, $N = e^{\int u(t)dt}(u(t)y – w(t))$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{d}{dt}e^{\int u(t)dt} = \frac{d}{dt}\left[\int u(t)dt\right]e^{\int u(t)dt} = u(t)e^{\int u(t)dt}$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{d}{dy}\left[e^{\int u(t)dt}(u(t)y - w(t))\right] = e^{\int u(t)dt}u(t)$$

Denklem tam olduğuna göre, çözüm:

$F(y,t) = \int Mdy + \psi(t) = \int e^{\int u(t)dt}dy + \psi(t) = ye^{\int u(t)dt} + \psi(t)$

$\frac{\partial F}{\partial t} = yu(t)e^{\int u(t)dt} + \psi'(t) = N,$

$$\psi'(t) = N - yu(t)e^{\int u(t)dt} = e^{\int u(t)dt}\Big(u(t)y - w(t)\Big) - yu(t)e^{\int u(t)dt} = -e^{\int U(t)dt}w(t),$$

$\psi(t) = \int -e^{\int u(t)dt} w(t)\, dt$

F(y,t) = $ye^{\int u(t)dt}$ - $\int w(t)e^{\int u(t)dt}\, dt$ = c

$ye^{\int u(t)dt} = c + \int w(t)e^{\int u(t)dt}\, dt$ çözümü verir.

Örnek: $t\frac{dy}{dt} + 2y = -t$

Yeniden düzenlenirse $dy + \frac{2y+t}{t} dt = 0$

$\partial M/\partial t = 1$, $\partial N/\partial y = 2/t$ tam değildir.

Integral faktörünü bulmak için

$Idy + I\frac{2y+t}{t}dt = 0$, $M = I$, $N = I\frac{2y+t}{t}$

$\partial M/\partial t = dI/dt$, $\partial N/\partial y = 2I/t$

$\partial M/\partial t = \partial N/\partial y$ olması için $dI/dt = 2I/t$ ve $\frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = \frac{2}{t}$ olmalı.

$$\int \frac{1}{I} dI = \int \frac{2}{t}\, dt$$

Buradan, $\ln(I) + c = 2\ln(t)$, veya $I = t^2$

Demek ki türevsel denklem $t^2dy + t^2\frac{2y+t}{t}dt = t^2dy + (2yt + t^2)dt = 0$ tamdır ve önceki örnekte çözümü bulunmuştur.