1. TÜREVSEL DENKLEMLER (devam)

1.5 BİRİNCİ SIRA DOĞRUSAL OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMÜ

Daha önce ele aldığımız doğrusal türevsel denklemlere hem dy/dy hem de y'nin kendisi doğrusal olarak giriyordu. Şimdi, y'nin denkleme doğrusal olmayan bir biçimde girdiği durumu ele alacağız. Bu tür denklemlere örnek olarak y'nin birden yüksek bir kuvvete sahip olması (y^2, y^3, … gibi) ve veya y'nin dy/dt ile çarpım olarak denkleme girmesini verebiliriz. Genel olarak bu tür denklemler aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$\mathrm{f(y,t)dy + g(y,t)dt = 0}$ veya

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\mathrm{g(y,t)}}{\mathrm{f(y,t)}} = \mathrm{h(y,t)}$$

a. *Tam türevsel denklemler*

Örnek: $2ytdy + y^2dt = 0$ doğrusal olmayan birinci sıra türevsel denklemdir. Burada $M = 2yt$, $N = y^2$ dir ve $\frac{\partial M}{\partial t} = 2y$, $\frac{\partial N}{\partial y} = 2y$ eşit olduğundan tamdır ve daha önce açıklanan yöntemle çözülebilir.

b. *Ayrılabilir değişkenler*

$\mathrm{f(y,t)dy + g(y,t)dt = 0}$ denkleminde f(y,t) fonksiyonunda sadece y, g(y,t) fonksiyonunda sadece t bulunuyorsa, diğer bir deyişle türevsel denklem $\mathrm{f(y)dy + g(t)dt = 0}$ şeklinde ise değişkenlerin ayrılabilir olduğu söylenir. Çünkü y'yi içeren terimler t'den matematiksel olarak ayrılabilir. Bu tür denklemler basit integral alma yöntemiyle çözülebilir.

c. *Doğrusal biçime indirgenebilir denklemler*

Bir türevsel denklem $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} + \mathrm{R(t)y = T(t)y^m}$ şeklindeyse, R ile T t'nin fonksiyonu ise ve m 0 ile 1 dışında herhangi bir sayı ise, bu denkleme Bernoulli denklemi denir. Bu tür denklemler he zaman doğrusal türevsel denkleme dönüştürülebilir ve bu şekilde çözülebilir.

Doğrusal denkleme dönüştürmek için önce iki tarafı da y^m ile bölelim.

$y^{-m}\frac{dy}{dt} + Ry^{1-m} = T$

Bir z değişkeni tanımlayalım: $z = y^{1-m}$. Böylece

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt} = (1-m)y^{-m}\frac{dy}{dt}$$

$$y^{-m}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(1-m)}\frac{dz}{dt}$$

Asıl denklemde yerine koyarsak:

$\frac{1}{(1-m)}\frac{dz}{dt} + Rz = T$ bulunur. İki tarafı da (1-m) ile çarpalım.

$\frac{dz}{dt} + (1-m)Rz = (1-m)T$ bulunur. Bu birinci sıra doğrusal türevsel denklemdir.

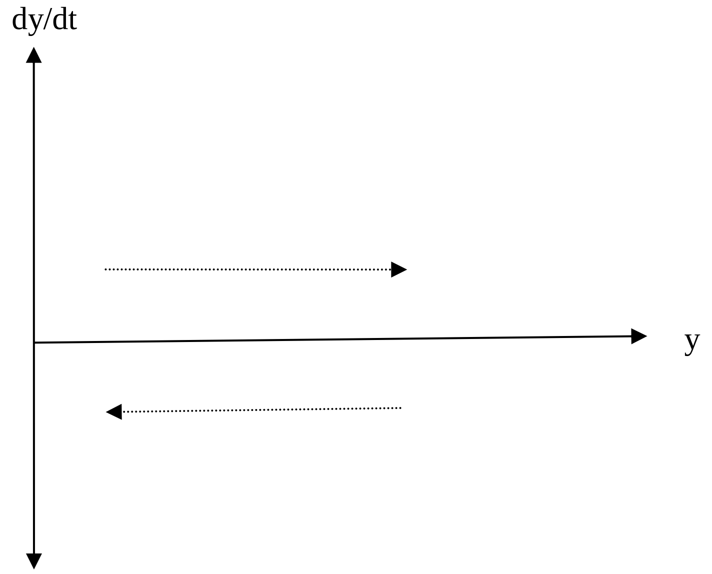
1.6 NİTELİKSEL – GRAFİK YAKLAŞIM

Bazı durumlarda türevsel denklemin çözümünü bulmak mümkün olmaz. Bunun iki nedeni olabilir:

1- Denklemin açık bir çözümünü bulmak matematiksel olarak mümkün değildir.
2- Denklemde belirsiz parametreler veya belirsiz fonksiyonlar vardır. (Belli bir ekonomik olguyu açıklamak için kurulan ekonomik modeller çok sayıda varsayım içerir. Genelde yapılmaya çalışılan olabildiğince az varsayım yapmaktır. Bu nedenle katsayılar veya fonksiyonlar üzerinde az kısıt konulmak istenebilir. Böylece örneğin bir fonksiyona açık bir form vermektense örtük fonksiyon olarak bırakılabilir.)

Bu tür durumlarda çözüm açıkça belirlenemese de çözümün nitelikleri ile ilgili fikir edinilebilir. Bunun için kullanılan yöntem **aşama çizgeleri**dir (faz diagramları).

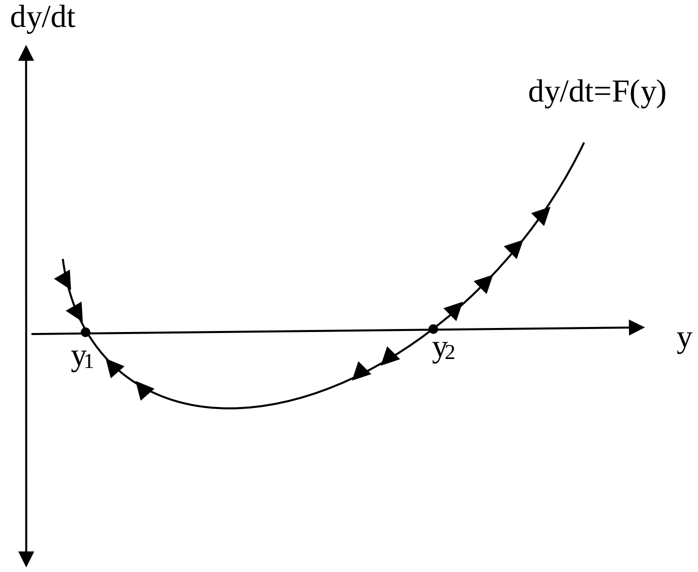
$\frac{dy}{dt} = F(y)$ gibi bir türevsel denklem ele alalım sağ tarafta açıkça gösterilmez. Bu nedenle bu tür denklemlere **otonom** (t değişkeninden bağımsız anlamında). Bu denklemin aşama çizgesini çizmek için y'nin yatay eksende, dy/dt'nin dikey eksende yer aldığı bir grafik çizelim.



Yatay eksenin üst tarafında dy/dt > 0 olduğundan bu bölgede t arttıkça y artmaktadır. Diğer bir deyişle, yatay eksenin üst tarafında zaman içinde y sağa doğru hareket eder. Yatay eksenin alt tarafında ise dy/dt < 0 olduğundan y sola doğru hareket eder.

$\frac{dy}{dt} = F(y) = 0$’ı sağlayan noktalar ise **denge durumu** veya **durgun durum** olarak adlandırılır. Bu noktalara varıldığında artık y değişmez, o noktada kalınır.

Grafiği aşağıdaki gibi olan bir diferansiyel denklem ele alalım.



Burada iki denge noktası vardır: y_1 ve y_2. Eğer y_1 veya y_2 noktalarından birisine varılırsa orada kalınır, zaman içinde bir değişme olmaz. Diğer noktalarda yatay eksenin üstünde sağa, altında sola hareket olur.

y_1’e yakın bir yerde t arttıkça y_1’e yaklaşılır: y_1 istikrarlı bir denge noktasıdır.

y_2’ye yakın bir yerde t arttıkça y_2’den uzaklaşılır: y_2 istikrarsız bir denge noktasıdır.

1.7 İKTİSADİ UYGULAMALAR

I- BÜYÜME PROBLEMİ

Bazı problemlerde herhangi bir değerdeki değişme, cari değerinin veya zamanın bir fonksiyonudur. Eğer y bir değişkenin t zamanındaki değeri ise, $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$ bu değişkenin değişme oranını, diğer bir deyişle büyüme oranını gösterir ve bu da bize bir türevsel denklem verir. Büyüme problemleri, diferansiyel denklemlerin iktisattaki kullanımlarının bazılarını oluşturur. Bu bölümde üç büyüme modeli ele alınacaktır: Nüfus atışı, Domar büyüme modeli ve Solow büyüme modeli.

a. Nüfus büyümesi

Nüfusun değişme oranını zamanın fonksiyonu olarak ele alalım. Aslında nüfus kesikli bir değişkendir. Diğer bir deyişle, tam sayılar olarak artar. Fakat eğer nüfus çok büyükse, bu artışlar nüfusun tümü açısından ihmal edilebilir derecede küçüktür. Dolayısıyla nüfus sürekli bir değişken olarak alınabilir. Bu bölümde nüfusun sürekli ve zamana göre türevlenebilir olduğu varsayılacaktır.

Diyelim ki N, t zamanındaki kişi sayısıdır. Herhangi bir t döneminde nüfus artışı üç nedenle ortaya çıkabilir: doğumlar (B), ölümler (D) veya göç (M). Matematiksel olarak bu ilişki aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\frac{dN}{dt} = \dot{N} = B(t) + D(t) \pm M(t)$$

Varsayalım ki doğumlar ve ölümler nüfusun doğrusal fonksiyonudur ($B(t) = aN(t)$, $D(t) = bN(t)$) ve göç yoktur (M(t) = 0). Bu durumda nüfus artış oranı aşağıdaki gibidir.

$$\frac{dN}{dt} = aN(t) + bN(t) = (a + b)N(t) = kN(t)$$

Bu durumda nüfus artış oranı kişi sayısı ile orantılıdır: $\frac{dN}{dt} = \dot{N} = kN$. Burada k = (a – b) bir sabittir ve a (> 0) doğum oranı, b(> 0) ölüm oranıdır. N pozitiftir ve eğer zamanla artıyorsa k > 0’dır.

Nüfus artış oranı bir türevsel denklemdir ve bu türevsel denklemin genel çözümü aşağıdaki gibi bulunur:

$\frac{1}{N}dN = kdt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{N}dN = \int kdt$ öyleyse, $\ln N = kt + c$ ve

$N(t) = ce^{kt}$

Ayrıca bir başlangıç yılında (t = 0 iken) nüfus diyelim ki N_B kadardır. Böylece türevsel denkleme ek koşul, $N(0) = N_B$ olmasıdır.

Başlangıç koşulu yerine konulursa: $N(0) = N_B = c$ ve belirli çözüm:

$N(t) = N_B e^{kt}$'dir.

Eğer doğum ve ölüm oranları eşitse nüfus dengededir ve N_B düzeyinde sabittir. Eğer doğum oranı ölüm oranından yüksekse nüfus artmaktadır: $N(t) > N_B$. Doğrum oranı ölüm oranından düşükse nüfus azalmaktadır: $N(t) < N_B$.

Belirli çözüm, başlangıç yılı yerine herhangi bir yıl cinsinden de verilebilir. Herhangi bir t_0 yılında nüfusun N_0 Ayrıca bir başlangıç yılında (t = 0 iken) nüfus diyelim ki N_0 kadardır. Bu durumda genel çözüm, $N(t) = ce^{kt}$ iken başlangıç koşulu, $N(t_0) = N_0 = ce^{kt_0}$'dır. Böylece $c = N_0 e^{-kt_0}$ olduğundan belirli çözüm: $N(t) = N_0 e^{k(t-t_0)}$'dir.

Bu çözümler göstermektedir ki bu problemde verilen nüfus, zaman içinde üstel olarak büyür. Bu nüfus artışı **Maltus kanunu** olarak bilinir.

Bazı durumlarda nüfus artışı $\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} = \dot{\mathrm{N}} = \mathrm{kN} - \lambda \mathrm{N}^2$ ile gösterilir.

Bu bir Bernoulli denklemidir. Doğrusal denkleme dönüştürmek için iki tarafı da N^{-2} ile çarpalım:

$$\mathrm{N}^{-2}\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{kN}^{-1} - \lambda$$

$\mathrm{z} = \mathrm{N}^{-1}$ dersek

$$\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dN}}\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} = -\mathrm{N}^{-2}\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}}$$

Veya $\mathrm{N}^{-2}\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}}$

Böylece diferansiyel denklem aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$-\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} - \mathrm{kz} = -\lambda$ veya $\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} + \mathrm{kz} = \lambda$

Bu birinci sıra sabit terimli, sabit katsayılı doğrusal türevsel denklemdir.

Homojen denklemin genel çözümü $z = Ae^{-kt}$ dir. Öyleyse $z_c = Ae^{-kt}$.

Özel integral: y_p'yi bulmak için $z = \alpha$ diyelim. Bu durumda, $dz/dt = 0$ ve toplam denklem $\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} + \mathrm{kz} = 0 + \mathrm{k}\alpha = \lambda$ olur. Böylece $\alpha = \lambda/k$ ve özel integral $z_p = \lambda/k$ olacaktır.

Toplam denklemin genel çözümü:

$z(t) = z_c + z_p = Ae^{-kt} + \lambda/k = \mathrm{N}^{-1}$

Böylece $N(t) = \frac{1}{Ae^{-kt}+\frac{\lambda}{k}}$

Başlangıç koşulu $\mathrm{N}(\mathrm{t}_0) = \mathrm{N}_0$ dersek, $N(\mathrm{t}_0) = \frac{1}{Ae^{-kt_0}+\frac{\lambda}{k}}$'dır. Böylece $\mathrm{A} = \left[\frac{1}{\mathrm{N}_0} - \frac{\lambda}{k}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{kt}_0}$ olduğundan belirli çözüm: $\frac{1}{\left[\frac{1}{\mathrm{N}_0}-\frac{\lambda}{k}\right]e^{-k(t-t_0)}+\frac{\lambda}{k}}$'dir.

b. Domar Büyüme Modeli

Domar ekonomik büyüme modelinde belli bir denge koşulunun sağlanması durumunda ortaya çıkan zaman patikasının belirlenmesi amaçlanır. Modelde yatırımların ikili özelliği üzerinde durulur:

a- Yatırımlardaki artış, toplam talebi, dolayısıyla geliri arttırır: $\frac{dY}{dt} = \frac{1}{s}\frac{dI}{dt}$. Makroekonomik denge yatırım tasarruf eşitliğini gerektirir (S=I). Tasarruflar ise gelirin sabit bir oranıdır (S = sY). Burada s marjinal tasarruf eğilimidir

b- Yatırımlardaki artış aynı zamanda üretken kapasiteyi veya potansiyel çıktıyı (κ(t)) arttırır. Sabit bir kapasite sermaye oranı varsayımıyla $\frac{\kappa(t)}{K(t)} \equiv \rho$ (ρ bir sabit). Bu oran, K(t) kadar sermayeye sahip bir ekonominin $\kappa(t) \equiv \rho K(t)$ kadar üretim yapma potansiyeli yarattığı anlamına gelmektedir. Buradan aşağıdaki ilişki ortaya çıkar.

$\frac{d\kappa}{dt} = \rho\frac{dK}{dt} = \rho I$

Dengede toplam talep kapasiteye eşittir: $\frac{dY}{dt} = \frac{d\kappa}{dt}$

Burada yanıtı aranan soru, bu denge koşulunun sağlanması için yatırımların nasıl bir zaman patikası izlemesi gerektiğidir.

$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{s}\frac{dI}{dt}$ ve $\frac{d\kappa}{dt} = \rho I$ eşitlikleri denge koşulunda yerine konulursa,

$\frac{1}{s}\frac{dI}{dt} = \rho I$ bir türevsel denklemdir. Yeniden düzenlenirse,

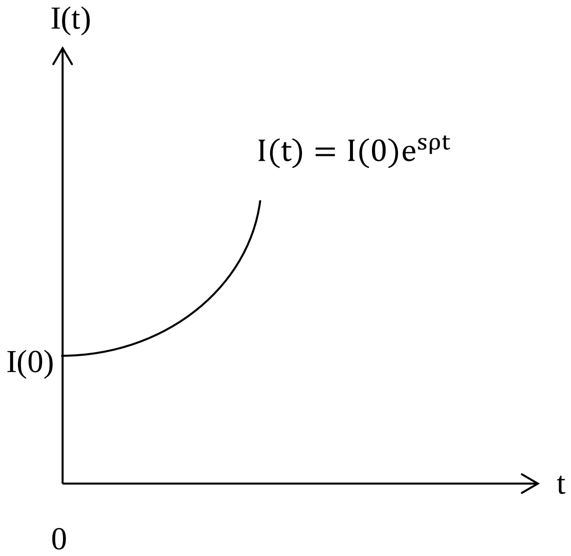
$\frac{dI}{dt} = s\rho I$ veya $\frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = s\rho dt$

Bu türevsel denklemin çözümü türev alınarak bulunabilir.

$$\int \frac{1}{I} dI = \int s\rho dt$$

Genel çözüm: $I(t) = Ae^{s\rho t}$

t = 0 iken I(0) = A olduğundan belirli çözüm $I(t) = I(0)e^{s\rho t}$'dır. Yatırımların bu denklemle verilen zaman patikasının grafiği aşağıdaki gibidir.



Bu sonuca göre, talep-kapasite dengesinin korunması için yatırımlar üstel olarak büyümelidir.

c. Solow Büyüme Modeli

Domar modelinde üretimin sadece sermayenin (K(t)) bir fonksiyonu olduğu varsayılır. Solow ekonomik büyüme modeli ise Domar modelini, üretim fonksiyonuna işgücünü (L(t)) de ekleyerek geliştirir:

Ulusal düzeyde üretim Q ile gösterilirse üretim fonksiyonu Q = F(K,L) şeklindedir. Burada $F_K > 0$, $F_L > 0$, $F_{KK} < 0$, $F_{LL} < 0$ olduğu varsayılmaktadır. Diğer bir deyişle, üretim faktörlerinin (K ve L) marjinal ürünleri (F_K ve F_L) pozitiftir ve azalan marjinal ürünler ($F_{KK} < 0$, $F_{LL} < 0$, azalan getiriler) sözkonusudur.

Yine daha önce olduğu gibi, ulusal gelir Q'nun sabit bir oranı (s) tasarruf edilmekte ve yatırıma harcanmaktadır: $dK/dt = I = sQ$

İşgücü sabit bir oranda (λ) büyümektedir: $dL/dt = \lambda L$

Üretim fonksiyonu doğrusal olarak türdeştir (ölçeğe göre sabit getiri söz konusudur):

$F(\beta K, \beta L) = \beta F(K, L)$

$\beta = 1/L$ dersek $F(K/L, 1) = (1/L)F(K, L)$ veya $F(K, L) = Q = LF(K/L,1) = Lf(k)$

Son adımda $k = K/L$ ve $f(k) = f(K/L) = F(K/L, 1)$ tanımları kullanılmıştır.

F(K,L) fonksiyonunun özellikleri kullanılarak f(k) fonksiyonunun özellikleri de çıkarılabilir.

$$F_K = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \frac{\partial [Lf(k)]}{\partial K} = L\frac{\partial f(k)}{\partial K} = L\frac{df(k)}{dk}\frac{\partial k}{\partial K} = Lf'(k)\left(\frac{1}{L}\right) = f'(k) > 0,$$

$$F_{KK} = \frac{\partial F_K}{\partial K} = \frac{\partial f'(k)}{\partial K} = \frac{df'(k)}{dk}\frac{\partial k}{\partial K} = f''(k)\left(\frac{1}{L}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad f''(k) < 0.$$

Sermaye stoku (K), kişi başı sermaye stoku (k) cinsinden K = kL olarak yazılabilir. Bunun zamana göre türevi, $\frac{dK}{dt} = k\frac{dL}{dt} + L\frac{dk}{dt}$'dir. Dolayısıyla,

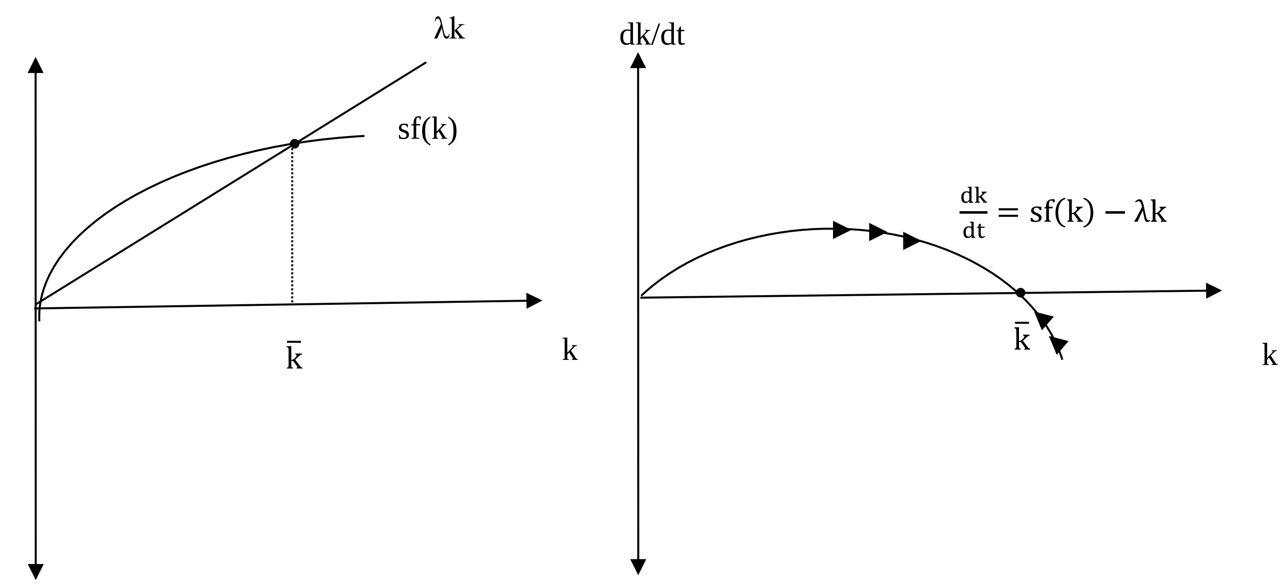
$$I = \frac{dK}{dt} = k\frac{dL}{dt} + L\frac{dk}{dt} = sQ = sF(K,L) = sLf(k), \text{ veya} \qquad \frac{dk}{dt} = sf(k) - \frac{k}{L}\frac{dL}{dt} \text{ bulunur.}$$

İşgücü büyüme oranını bu denklemde yerine koyarsak, Solow büyüme modelinin temel denklemine ulaşırız:

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - \lambda k$$

Bu bir türevsel denklemdir ve f(k) fonksiyonu açık bir şekilde verilmediği sürece nicel çözüm elde edilemez. Ancak aşama çizgesiyle inceleme yapılabilir.

Aşama çizgesinde, k değişirken dk/dt'nin nasıl değiştiği incelenmektedir. Solow temel denkleminde ise bu, iki ifade arasındaki farka eşittir: sf(k) ve λk. Bu nedenle öncelikle bu iki ifadenin grafiğini çizip daha sonra bunlar arasındaki fark olarak aşama çizgesi çizilebilir.



Grafiğin sol panelinde sf(k) ve λk değerleri çizilmiştir. Buna bağlı olarak dk/dt iki eğri arasındaki dikey uzaklığa eşittir. Grafiğin sağ panelinde bu fark çizilmiştir: sf(k) > λk iken dk/dt > 0, sf(k) < λk iken dk/dt < 0 ve sf(k) = λk iken dk/dt = 0'dır. Son durum denge noktasını verir. Eğer k düzeyi bundan düşükse dk/dt > 0 olur ve hareket denge düzeyine doğrudur. Aksine, k düzeyi denge değerinden yüksekse dk/dt < 0'dir ve hareket yine denge düzeyine doğru olacaktır. Diğer bir deyişle bu model istikrarlıdır.

Daha önce de belirtildiği gibi, üretim fonksiyonu açık bir forma sahip olamadığından nicel çözüm elde edilemiyordu. Ancak fonksiyonun formu ile ilgili bir varsayım yaparak çözüm de bulunabilir. Örneğin üretim fonksiyonunun Cobb-Douglas olması durumunda

$$Q = F(K,L) = K^{\alpha}L^{1-\alpha} = L(K/L)^{\alpha} = Lk^{\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

şeklinde olacaktır. Bu durumda temel Solow denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{dk}{dt} = sk^{\alpha} - \lambda k$$

Bu bir Bernoulli denklemidir $(R(t) = \lambda, T(t) = s, m = \alpha)$. Doğrusal denkleme dönüştürmek için önce iki tarafı da k^{α} ile bölelim.

$$k^{-\alpha}\frac{dk}{dt} + \lambda k^{1-\alpha} = s$$

Bir z değişkeni tanımlayalım: $z = k^{1-\alpha}$. Böylece

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dk}\frac{dk}{dt} = (1-\alpha)k^{-\alpha}\frac{dk}{dt}$$

$$k^{-\alpha}\frac{dk}{dt} = \frac{1}{(1-\alpha)}\frac{dz}{dt}$$

Asıl denklemde yerine koyarsak:

$\frac{1}{(1-\alpha)}\frac{dz}{dt} + \lambda z = s$ bulunur. İki tarafı da (1-α) ile çarpalım.

$\frac{dz}{dt} + (1-\alpha)\lambda z = (1-\alpha)s$ bulunur. Bu sabit katsayılı, sabit terimli birinci sıra bir türevsel denklemdir.

Genel çözüm:

$\frac{dz}{dt} + (1-\alpha)\lambda z = (1-\alpha)s$ bulunur. Bu sabit katsayılı, sabit terimli birinci sıra bir türevsel denklemdir.

İndirgenmiş denklem: $\frac{dz}{dt} + (1-\alpha)\lambda z = 0$. İndirgenmiş denklemin genel çözümü:

$z_c = Ae^{-(1-\alpha)t}$

Toplam denklemin herhangi bir özel çözümü: z = c. Veya dz/dt = 0. Toplam denklemde yerine konulursa $0 + (1-\alpha)\lambda c = (1-\alpha)s$. Buradan $c = s/\lambda$. Öyleyse, özel integral:

$z_p = s/\lambda$ olacaktır.

Toplam denklemin genel çözümü:

$z(t) = Ae^{-(1-\alpha)t} + s/\lambda$

Belirli çözüm:

$z(0) = A + s/\lambda$ olduğundan $A = z(0) - s/\lambda$

$z(t) = [z(0) - s/\lambda]e^{-(1-\alpha)t} + s/\lambda$

Daha önce $z = k^{1-\alpha}$ olarak tanımlamıştık. Yerine koyarsak:

$k(t)^{1-\alpha} = [k(0)^{1-\alpha} - s/\lambda]e^{-(1-\alpha)t} + s/\lambda$

Denge değeri, $\frac{dk}{dt} = 0$ olmasıdır. Asıl denkleme göre bu değer $\lambda k^{1-\alpha} = s$ veya $k(t) = (\frac{s}{\lambda})^{\frac{1}{1-\alpha}}$'dır.

Çözüm denklemine göre $t \to \infty$ iken $e^{-(1-\alpha)t} \to 0$ ve $k(t)^{1-\alpha} \to \frac{s}{\lambda}$ veya $k(t) \to (\frac{s}{\lambda})^{\frac{1}{1-\alpha}}$ denge değerine yaklaşır. Demek ki denge istikrarlıdır.

II- FİYAT UYUM MEKANİZMASI

Herhangi bir malın arz ve talep denklemleri aşağıdaki gibidir.

$D(P) = a - bP$ $(a, b > 0)$

$S(P) = -\alpha + \beta P$ $(\alpha, \beta > 0)$

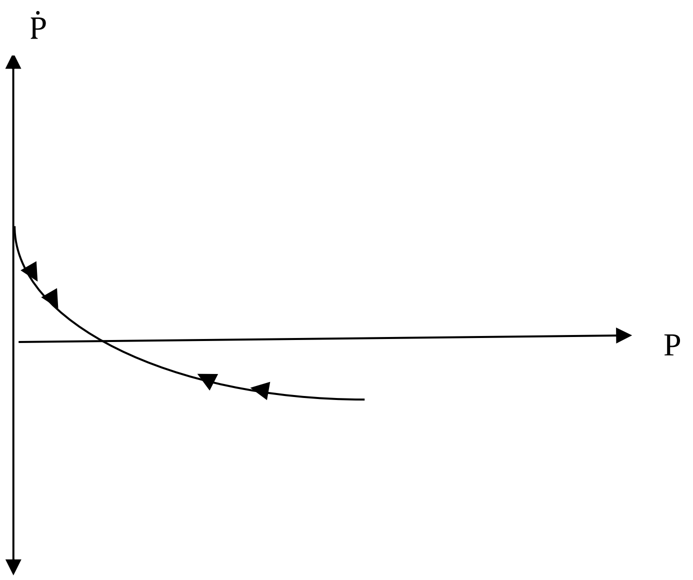
dengede $\overline{P} = \frac{a+b}{\alpha+\beta}$ bulunur. Diyelim ki fiyat zamanla değişmektedir (P = P(t)) ve P'nin zaman içindeki değişimi fazla talebin bir fonksiyonudur.

$\dot{P} = \frac{dP}{dt} = \lambda[D(P) - S(P)]$ $(\lambda > 0)$

Burada λ bir sabittir. D(P) ve S(P) fonksiyonlarını denklemde yerine koyarsak,

$\frac{dP}{dt} = \lambda[a - bP + \alpha - \beta P] = \lambda(a + \alpha) - \lambda(b + \beta)$ veya $\frac{dP}{dt} + \lambda(b + \beta)P = \lambda(a + \alpha)$

Bu denklem **fiyat uyum mekanizmasını** temsil eder ve doğrusal sabit katsayılı diferansiyel denklemdir. Zaman çizgesi aşağıdaki gibidir ve denge istikrarlıdır.



Çözüm:

Denklem yeniden düzenlenirse

$dP + [\lambda(b + \beta)P - \lambda(a + \alpha)]dt = 0$

$IdP + I[\lambda(b+\beta)P - \lambda(a+\alpha)]dt = 0$

$M = I$, $N = I[\lambda(b+\beta)P - \lambda(a+\alpha)]$

$\partial M/\partial t = dI/dt$, $\partial N/\partial P = I\lambda(b+\beta)$

$\partial M/\partial t = \partial N/\partial P$ olması için $dI/dt = I\lambda(b+\beta)$ ve $\frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = \lambda(b+\beta)$olmalı.

$$\int \frac{1}{I} dI = \int \lambda(b+\beta)\, dt$$

Buradan, $\ln(I) + c = \lambda(b+\beta)t$, veya $I = e^{\lambda(b+\beta)t}$

$F(P,t) = \int e^{\lambda(b+\beta)t} dP + \psi(t) = e^{\lambda(b+\beta)t}P + \psi(t)$

$\frac{\partial F}{\partial t} = P\lambda(b+\beta)e^{\lambda(b+\beta)t} + \psi'(t) = N,$

$\psi'(t) = N - P\lambda(b+\beta)e^{\lambda(b+\beta)t} = e^{\lambda(b+\beta)t}[\lambda(b+\beta)P - \lambda(a+\alpha)] - P\lambda(b+\beta)e^{\lambda(b+\beta)t},$

$$\psi(t) = \int e^{\lambda(b+\beta)t}[\lambda(b+\beta)P - P\lambda(b+\beta) - \lambda(a+\alpha)]\, dt = e^{\lambda(b+\beta)t}\frac{1}{\lambda(b+\beta)}[-\lambda(a+\alpha)]$$
$$= -e^{\lambda(b+\beta)t}\left[\frac{(a+\alpha)}{(b+\beta)}\right]$$

$F(y,t) = e^{\lambda(b+\beta)t}P - e^{\lambda(b+\beta)t}\left[\frac{(a+\alpha)}{(b+\beta)}\right] = c$

$e^{\lambda(b+\beta)t}P = c + e^{\lambda(b+\beta)t}\left[\frac{(a+\alpha)}{(b+\beta)}\right]$

$P = ce^{-\lambda(b+\beta)t} + \frac{(a+\alpha)}{(b+\beta)}$ genel çözümdür.

Denge istikrarlı mıdır?

$t \to \infty \Rightarrow e^{-\lambda(b+\beta)t} \to 0$ olduğundan $P(t) \to \frac{(a+\alpha)}{(b+\beta)} = \overline{P}$

Zaman içinde P denge fiyatına yaklaşır. Bu nedenle istikrarlıdır.

Belirli çözüm:

$P(0) = c + \frac{(a+\alpha)}{(b+\beta)} = c + \overline{P},\ \ c = \overline{P} - P(0)$

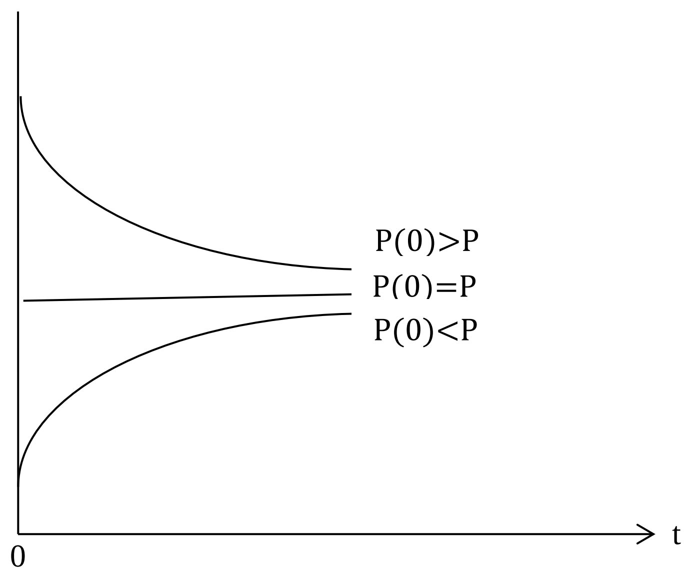
$P(t) = \overline{P} + (\overline{P} - P(0))e^{-\lambda(b+\beta)t}$

Diyelim ki başlangıçta denge vardır: $P(0) = \overline{P}$ ⇒ $P(t) = \overline{P}$ sabittir ve değişmez.

Diyelim ki başlangıçta denge yoktur ve $P(0) > \overline{P}$ ⇒ $P(t) > \overline{P}$

Diyelim ki başlangıçta denge yoktur ve $P(0) < \overline{P}$ ⇒ $P(t) < \overline{P}$ bu iki durumda da P $\overline{P}$'ye yaklaşır.

Zaman patikası:



III- PARASAL MODELLER

Zamanlar arası iktisadi modellerde genellikle bekleyişlerin nasıl oluştuğu da dikkate alınmalıdır. Özellikle parasal modellerde bekleyişlerin istikrarla ilgili önemli sonuçları vardır.

Eski parasal modellerde **uyarlanmış bekleyişler** varsayımı yapılırdı. Bu varsayıma göre beklenen enflasyon oranı, önceki enflasyon oranlarının bir fonksiyonudur. Böylece insanların enflasyonu her zaman olduğundan düşük ya da yüksek tahmin etmesi mümkündür.

Bunun yerine alternatif olarak yapılan varsayım **rasyonel bekleyişler** varsayımıdır. Bu varsayıma göre insanlar var olan tüm bilgiyi toplar ve sonuçta, ortalamada enflasyonu doğru olarak tahmin ederler.

Parasal modellerde temel ilişki, para talebi denklemidir:

$$m(t) - p(t) = -\lambda\pi(t), \qquad (\lambda > 0)$$

Burada m(t) para miktarının logaritması, p(t) fiyat düzeyinin logaritması, π(t) beklenen enflasyonun logaritması ve λ bir sabittir.

Bu model hiperenflasyon dönemlerini modellemek için kullanılmıştır. Bu tür dönemlerde enflasyonu belirleyen temel faktörün para miktarı ve enflasyon beklentisi olduğunu varsayar. *Uyarlanmış bekleyişler* varsayımına göre,

$$\dot{\pi}(t) = \alpha[\dot{p}(t) - \pi(t)], \qquad (\alpha > 0)$$

Beklenen enflasyon ile gerçekleşen enflasyon oranı arasındaki farka bağlı olarak beklentiler değiştirilir. Bu değişmenin hızı ise α katsayısı tarafından belirlenir. Örneğin gerçekleşen enflasyon ($\dot{p}(t)$) beklenen enflasyondan ($\pi(t)$) yüksekse beklenen enflasyon artar ($\dot{\pi}(t) > 0$). Aksine gerçekleşen enflasyon ($\dot{p}(t)$) beklenen enflasyondan ($\pi(t)$) düşükse beklenen enflasyon düşer ($\dot{\pi}(t) < 0$).

Bu modelde fiyat düzeyinin logaritmasının zaman içindeki hareketini bulmak isteyebiliriz: p(t) = ?

Denklemi yeniden yazarsak:

$$\dot{p}(t) = \frac{1}{\alpha}\dot{\pi}(t) + \pi(t)$$

Para talebi denkleminden $\dot{m}(t) - \dot{p}(t) = -\lambda\dot{\pi}(t)$ bulunur. Böylece,

$\dot{\pi}(t) = -\frac{1}{\lambda}\dot{m}(t) + \frac{1}{\lambda}\dot{p}(t)$ ve $\pi(t) = -\frac{1}{\lambda}m(t) + \frac{1}{\lambda}p(t)$

Bu denklemleri bekleyişler denkleminde yerine koyarsak,

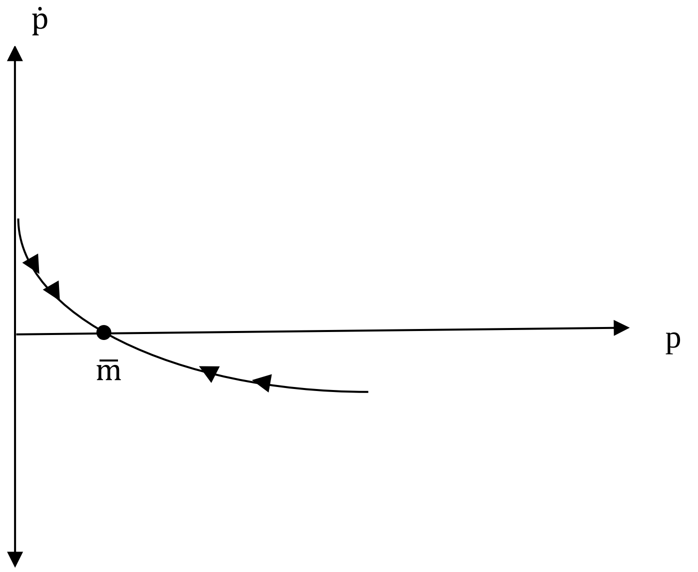
$\dot{p}(t) = \frac{1}{\alpha}[-\frac{1}{\lambda}\dot{m}(t) + \frac{1}{\lambda}\dot{p}(t)] - \frac{1}{\lambda}m(t) + \frac{1}{\lambda}p(t)$, yeniden düzenlendiğinde

$\dot{p}(t) = \frac{1}{1-\alpha\lambda}\dot{m}(t) + \frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}m(t) - \frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}p(t)$

Para miktarının değişmediği varsayılırsa $m(t) = \overline{m}$ ve $\dot{m}(t) = 0$ olacaktır. Bu durumda,

$\dot{p}(t) = \frac{-\alpha}{1-\alpha\lambda}p(t) + \frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}\overline{m}$

diferansiyel denklemine ulaşırız. Bu denklemin aşama çizgesi aşağıdaki gibidir.



Aşama çizgesinin eğimi, $\frac{-\alpha}{1-\alpha\lambda}$'dır ve eğer $\alpha\lambda < 1$ ise bu eğim negatiftir. Denge $\overline{m}$ noktasında sağlanır ($\dot{p}(t)$ iken $p(t) = \overline{m}$'dir). İstikrarlı bir dengedir.

Çözüm:

Denklem yeniden düzenlenirse

$\dot{p}(t) + \frac{\alpha}{1-\alpha\lambda} p(t) - \frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}\bar{m} = 0$ veya

$dp + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda} p - \frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}\bar{m}\right) dt = 0$

$Idp + I\left(\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda} p - \frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}\bar{m}\right) dt = 0$

M = I, N = $I\left(\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda} p - \frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}\bar{m}\right)$

$\partial M/\partial t = dI/dt = \partial N/\partial p = I\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}$, öyleyse $\frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = \frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}$

$$\int \frac{1}{I} dI = \int \frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}\, dt$$

$I = e^{\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}t}$

F(P,t) = $\int e^{\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}t} dp + \psi(t) = e^{\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}t} p + \psi(t)$

$\frac{\partial F}{\partial t} = p\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda} e^{\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}t} + \psi'(t) = N,$

$\psi'(t) = N - p\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda} e^{\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}t} = e^{\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}t}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda} p - \frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}\bar{m}\right) - p\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda} e^{\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}t} = e^{\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}t}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}\bar{m}\right),$

$$\psi(t) = \int -\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}\bar{m} e^{\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}t} dt = -\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}\frac{1-\alpha\lambda}{\alpha} e^{\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}t}\bar{m} = -e^{\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}t}\bar{m}$$

F(P,t) = $e^{\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}t} p - \bar{m} e^{\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}t} = c$

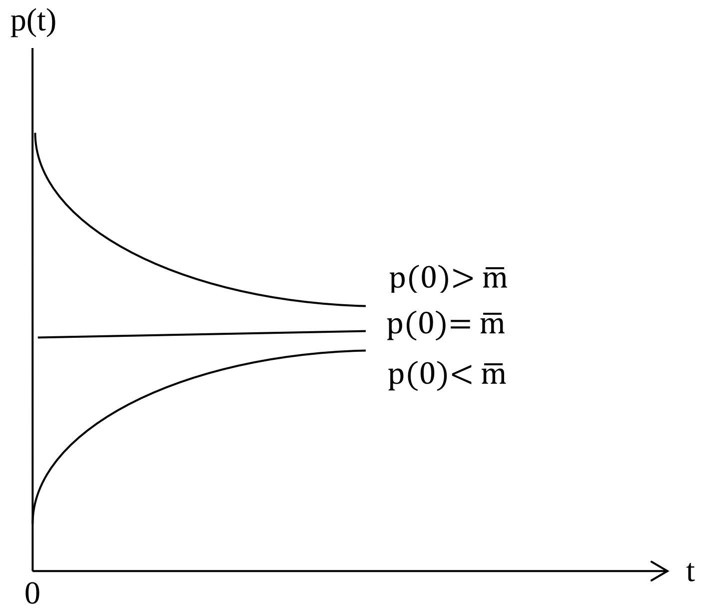
Genel çözüm: $p(t) = \bar{m} + ce^{-\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}t}$

$t \to \infty \Rightarrow e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}t} \to 0$ olduğundan $p(t) \longrightarrow \bar{m}$ istikrarlı olduğu yeniden teyit edildi.

$p(0) = \bar{m} + c \qquad \Rightarrow c = p(0) - \bar{m}$

Belirli çözüm: $p(t) = \bar{m} + (p(0) - \bar{m})e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}t}$

Zaman patikası:



Rasyonel bekleyişler varsayımının fiyat dinamikleri ile ilgili sonuçları farklıdır.

Bir tür rasyonel bekleyiş yaklaşımı, tam öngörüdür: bir değişkenin gelecekteki değeri ile ilgili insanların beklentisi gerçekleşen değere tam olarak eşittir. Thomas Sargent ve Neil Wallace (1973) fiyatların tam esnek olduğu ve tam öngörü varsayan bir modelde fiyatların nasıl belirlendiğini incelemişlerdir.

Tam öngörü: $\pi(t) = \dot{p}(t)$

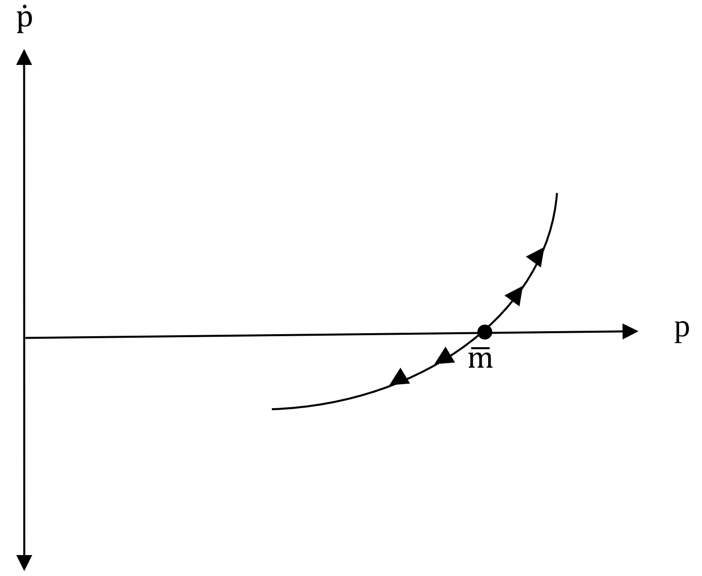
Bunu para talebi denkleminde yerine koyarsak,

$m(t) - p(t) = -\lambda\pi(t) = -\lambda\dot{p}(t)$ veya

$\dot{p}(t) = \frac{1}{\lambda}p(t) - \frac{1}{\lambda}m(t)$

Daha önce olduğu gibi para miktarının sabit olduğunu varsayalım: $m(t) = \bar{m}$

Bu denklemin aşama çizgesi:



$\lambda > 0$ olduğundan bu denklem istikrarsızdır.

Çözüm:

Denklem yeniden düzenlenirse

$\dot{p}(t) - \frac{1}{\lambda}p(t) + \frac{1}{\lambda}\bar{m} = 0$

$\mathrm{I}dp + \mathrm{I}\left(\frac{-1}{\lambda}p + \frac{1}{\lambda}\bar{m}\right)dt = 0$

$d\mathrm{I}/dt = -\,\mathrm{I}\frac{1}{\lambda}$ böylece $\int \frac{1}{\mathrm{I}}d\mathrm{I} = \int \frac{-1}{\lambda}\,dt$

$\mathrm{I} = e^{\frac{-1}{\lambda}t}$

$F(P,t) = \int e^{\frac{-1}{\lambda}t}dp + \psi(t) = e^{\frac{-1}{\lambda}t}p + \psi(t)$

$\frac{\partial F}{\partial t} = p\frac{-1}{\lambda}e^{\frac{-1}{\lambda}t} + \psi'(t) = N,$

$\psi'(t) = N - p\frac{-1}{\lambda}e^{\frac{-1}{\lambda}t} = e^{\frac{-1}{\lambda}t}\left(\frac{-1}{\lambda}p + \frac{1}{\lambda}\bar{m}\right) - p\frac{-1}{\lambda}e^{\frac{-1}{\lambda}t} = e^{\frac{-1}{\lambda}t}\frac{1}{\lambda}\bar{m},$

$\psi(t) = \int e^{\frac{-1}{\lambda}t}\frac{1}{\lambda}\bar{m}dt = \frac{1}{\lambda}\bar{m}(-\lambda)e^{\frac{-1}{\lambda}t} = \bar{m}e^{\frac{-1}{\lambda}t}$

F(P,t) = $e^{\frac{-1}{\lambda}t}p - \bar{m}e^{\frac{-1}{\lambda}t} = c$

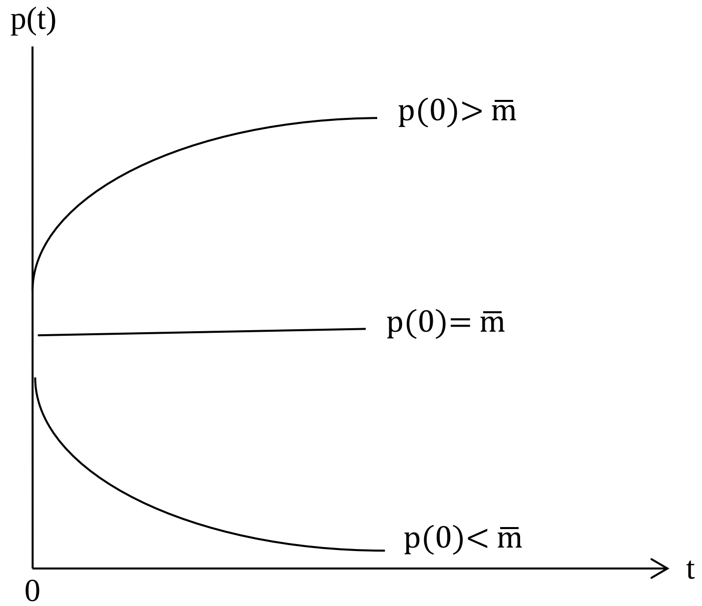
Genel çözüm: $p(t) = \bar{m} + ce^{\frac{1}{\lambda}t}$

$t \to \infty \Rightarrow ce^{\frac{1}{\lambda}t} \to \infty$ olduğundan modelin istikrarsız olduğu teyit edildi.

$p(0) = \bar{m} + c \qquad \Rightarrow c = p(0) - \bar{m}$

Belirli çözüm: $p(t) = \bar{m} + (p(0) - \bar{m})e^{\frac{1}{\lambda}t}$

Zaman patikası:



$p(0) = \bar{m} \Rightarrow p(t) = \bar{m}$ ve orada kalır. $p(0) > \bar{m} \Rightarrow p(t) > \bar{m}$ ve uzaklaşır.

$p(0) < \bar{m} \Rightarrow p(t) < \bar{m}$ ve uzaklaşır.

IV- DÖVİZ KURUNUN BELİRLENMESİNDE PARASAL MODEL

Uluslararası yatırımcılar, büyük miktarda fonları çok hızlı biçimde bir ülkeden diğerine kaydırabilmektedir. Bu nedenle uluslararası sermaye hareketleri döviz kurunun önemli belirleyicilerindendir. Uluslararası sermaye hareketlerini dikkate alan bir döviz kuru modeli, parasal modeldir.

Bu modelde temel ilişki faiz paritesidir. Faiz paritesi, bir arbitraj ilişkisidir. Aşırı karın olmaması durumudur. Bu ilişkiye göre, farklı paralar cinsinden basılmış bonolar, bunların getirisi aynı paraya dönüştürüldüğünde, eşit getiriye sahiptir. Sermaye, uluslararasında serbestçe hareket etiğinde bu arbitraj ilişkisi geçerli olur.

Faiz paritesine göre herhangi bir t zamanında yurtiçi bonoların faiz oranı i(t), o tarihte yabancı bonolara verilen faiz oranı i^* (bunun zaman içinde sabit olduğu varsayılır) ile yerli paranın değerindeki beklenen değişme oranı toplamına eşittir.

Tam öngörü varsayımıyla, döviz kurundaki beklenen değişme gerçekleşene eşittir. Döviz kuru E(t) ile gösterilirse döviz kurundaki değişme oranı $\frac{dE(t)/dt}{E(t)}$ ile gösterilir.

Burada E(t) bir birim yabancı paranın yerli para karşılığıdır. Örneğin E(t) = 6.3 TL'dir. Dolayısıyla E(t)'deki artış, yerli paranın değer kaybetmesi anlamına gelir.

$\ln E(t) = \varepsilon(t)$ dersek değişim oranı, $\frac{1}{E(t)}\frac{dE(t)}{dt} = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$'dir.

Böylece faiz paritesi, $i(t) = i^* + \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$

Bunun sol tarafı yurtiçi bonoların getirisini, sağ taraf yabancı bonoların getirisini gösterir. Yabancı bonolar hem faiz getirir hem de yerli yerli paranın değer kaybetmesi durumunda, yabancı para tutmuş olmanın getirisini içerir.

Arbitraj, yurtiçi bonoların getirisinin yabancı bonolara eşit olmasını gerektirir.

Bu modelde iki ilişki daha vardır:

1- Para talebi denklemi: $M(t) - P(t) = -\lambda i(t)$
   Nominal faiz oranı para tutmanın alternatif maliyetidir. Bu nedenle faiz oranı artınca para talebi düşer.

2- Reel döviz kuru sabittir. Reel döviz kuru $\frac{E(t)}{P(t)}$ ile gösterilir. Bunun 1'e eşit olduğu varsayımıyla, E(t) = P(t) veya iki tarafın logaritması alınırsa $\varepsilon(t) = p(t)$.

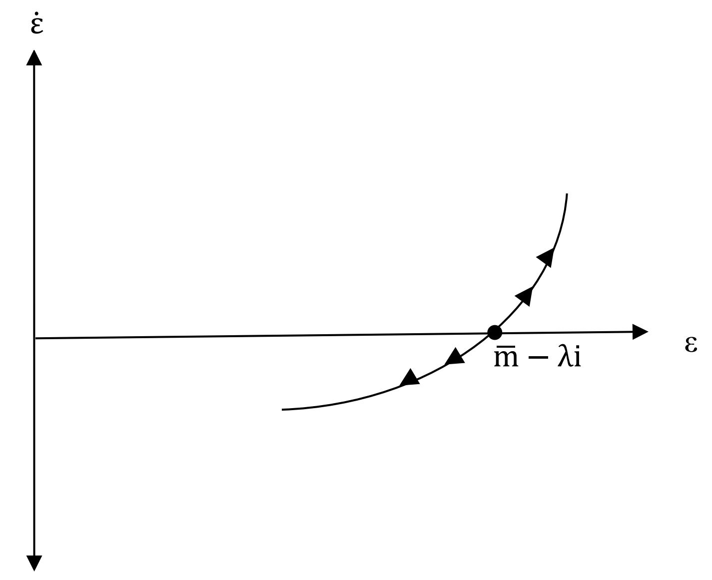
Bu modelde döviz kurunun zaman içindeki hareketini bulalım.

Faiz paritesinden $i(t) = i^* + \dot{\varepsilon}(t)$

Para talebi ilişkisinden: : $i(t) = -\frac{1}{\lambda}m(t) + \frac{1}{\lambda}p(t)$. Faiz paritesinde yerine konulursa, $\dot{\varepsilon}(t) = -\frac{1}{\lambda}M(t) + \frac{1}{\lambda}P(t) - i^*$

Reel döviz kuru ilişkisinden: $\varepsilon(t) = p(t)$. Son denklemde yerine konulursa, $\dot{\varepsilon}(t) = -\frac{1}{\lambda}m(t) + \frac{1}{\lambda}\varepsilon(t) - i^*$ veya $\dot{\varepsilon}(t) - \frac{1}{\lambda}\varepsilon(t) = -\frac{1}{\lambda}m(t) - i^*$. Bu bir diferansiyel denklemdir. Yine $m(t) = \bar{m}$ varsayalım.

Aşama çizgesi:



$\frac{1}{\lambda} > 0$ olduğundan aşama çizgesi pozitif eğimlidir ve model istikrarsızdır.