1. TÜREVSEL DENKLEMLER (devam)

1.8 İKİNCİ SIRA TÜREVSEL DENKLEMLER

Bu bölümde sabit katsayılı ikinci sıra türevsel denklemler ele alınacaktır. Bu tür denklemler aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = R(t)$$

veya

$$ay'' + by' + cy = R(t)$$

Burada a, b ve c birer sabittir.

Bu denklemin genel çözümü tamamlayıcı fonksiyon (y_c yani indirgenmiş denklemin genel çözümü) ve özel integralin (y_p, toplam denklemin herhangi bir çözümünün) toplamına eşittir:

$$y(t) = y_c + y_p$$

I- TAMAMLAYICI FONKSİYON

Toplam denklemin homojen hali (indirgenmiş denklem) şu şekildedir:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Bir türevsel denklemin çözümünü bulmanın bir yolu, standart bir fonksiyon belirleyip bunun denklemi sağlayıp sağlamadığını kontrol etmektir. Bu standart fonksiyonu biraz genel tutma amacıyla da en azından bir parametreyi belirsiz tutabiliriz. Genelde kullanılan bir standat fonksiyon $y = e^{rt}$'dir. Burada r bir parametredir ve değeri bilinmemektedir. Bu fonksiyonun türevsel denklemi sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim:

$$y = e^{rt}, \qquad y' = re^{rt}, \qquad y'' = r^2e^{rt}$$

İndirgenmiş denklemde yerine koyarsak,

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0$$

$e^{rt} \neq 0$ olduğundan $ar^2 + br + c = 0$'ı sağlayan r değerleri bulunursa, elde edilen e^{rt} değerleri indirgenmiş denklemin çözümü olur.

$ar^2 + br + c = 0$ karesel fonksiyonuna türevsel denklemin *yardımcı denklemi* denir. Bu yardımcı denklemi sağlayan r değerlerini bulurken karşımıza üç durum çıkabilir:

1- Kökler reel ve farklı sayılardır.
2- Kökler aynıdır (tek kök vardır).
3- Kökler reel sayı değildir. Diğer bir deyişle, karmaşık (kompleks) kökler söz konusudur: kökler negatif bir sayının karekökünü içerebilir.

Şimdi, bu üç duruma ayrı ayrı bakalım.

DURUM 1: Kökler reeldir ve farklıdır

$ar^2 + br + c = 0$'ı veren r değerlerini arıyoruz.

$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ olduğuna göre, birinci durumda $b^2 - 4ac > 0$ veya $b^2 > 4ac$ olmalıdır.

Bunu veren r_1 ve r_2'yi kullanarak indirgenmiş denklemin iki çözümü $y_1 = e^{r_1 t}$ ve $y_2 = e^{r_2 t}$ olarak bulunur. İndirgenmiş denklemin genel çözümü (tamamlayıcı fonksiyon) ise aşağıdaki gibidir.

$$y = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}$$

Örnek: $6y'' + y' - 2y = 0$

Bir çözüm diyelim ki $y = e^{rt}$, $y' = re^{rt}$, $y'' = r^2 e^{rt}$,

yerine koyarsak,

$6r^2 e^{rt} + re^{rt} - 2e^{rt} = 0$ bulunur. Bu eşitliği sağlayan r değerleri nelerdir?

$$e^{rt}(6r^2 + r - 2) = 0$$

Yardımcı denklem: $6r^2 + r - 2 = 0$

$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-(4)(6)(-2)}}{(2)(6)} = \frac{-1 \pm 7}{12}$, $r_1 = \frac{1}{2}$ ve $r_2 = \frac{-2}{3}$

İndirgenmiş denklemin iki çözümü:

$y_1 = e^{(\frac{1}{2})t}$ ve $y_2 = e^{(-\frac{2}{3})t}$

İndirgenmiş denklemin genel çözümü:

$$y = k_1 e^{(\frac{1}{2})t} + k_2 e^{(-\frac{2}{3})t}$$

Burada k_1 ve k_2 rasgele sabitlerdir.

DURUM 2: Kökler aynıdır (tek kök)

Bu durum, yardımcı denklemin $r^2 - 2\alpha r + \alpha^2 = 0$ olduğu durumda ortaya çıkar.

Diğer bir deyişle, indirgenmiş denklem $e^{rt}(r^2 - 2\alpha r + \alpha^2) = 0$, indirgenmiş denklem $y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$ şeklindedir.

Yardımcı denklem $r^2 - 2\alpha r + \alpha^2 = 0$'in bir çözümü, $(r - \alpha)^2 = 0$ veya $r = \alpha$ olduğundan indirgenmiş denklemin bir çözümü $y = e^{\alpha t}$'dir.

İkinci bir çözüm olarak $y = te^{\alpha t}$ denenebilir. Bunun bir çözüm olabilmesi için indirgenmiş denklemi sağlaması gerekir. Bunun için birinci ve ikinci türevlerini bulalım:

$y' = e^{\alpha t} + t\alpha e^{\alpha t}$, $y'' = \alpha e^{\alpha t} + \alpha e^{\alpha t} + t\alpha^2 e^{\alpha t}$. İndirgenmiş denklemde yerine koyduğumuzda,

$\alpha e^{\alpha t} + \alpha e^{\alpha t} + t\alpha^2 e^{\alpha t} - 2\alpha(e^{\alpha t} + t\alpha e^{\alpha t}) + \alpha^2(te^{\alpha t}) = 0,$

$e^{\alpha t}(2\alpha + t\alpha^2 - 2\alpha - 2\alpha t\alpha + \alpha^2 t) = 0$ sağlanır. Öyleyse $y = te^{\alpha t}$ de bir çözümdür.

Böylece, genel çözüm aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} y &= k_1 e^{\alpha t} + k_2 t e^{\alpha t} \\ &= e^{\alpha t}(k_1 + k_2 t) \end{aligned}$$

Örnek: $y'' - 6y' + 9y = 0$

Bir çözüm $y = e^{rt}$ olsun. Öyleyse $y' = re^{rt}$, $y'' = r^2 e^{rt}$, yerine koyarsak,

$r^2 e^{rt} - 6re^{rt} + 9e^{rt} = 0$ bulunur.

$e^{rt}(r^2 - 6r + 9) = 0$ veya $(r - 3)^2 = 0$, r = 3. Böylece bir çözüm $y_1 = e^{3t}$'dir.

İkinci çözüm $y_2 = te^{3t}$ ve genel çözüm (tamamlayıcı fonksiyon) $y = e^{3t}(k_1 + k_2 t)$'dir.

DURUM 3: Kökler reel değildir

Bu durum $b^2 - 4ac < 0$ olması durumunda ortaya çıkar.

$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{-1}\sqrt{4ac - b^2}$

$p = \frac{-b}{2a}$, $q = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ ve $i = \sqrt{-1}$ dersek,

$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = p \pm qi,$

Çözümler $y_1 = e^{(p+qi)t}$ ve $y_2 = e^{(p-qi)t}$ olarak bulunur. Genel çözüm (tamamlayıcı fonksiyon) $y = k_1e^{(p+qi)t} + k_2e^{(p-qi)t}$ şeklindedir. Ancak bu çözümler hala i karmaşık sayısını içermektedir. Bu nedenle de tatmin edici bir çözüm değildir. Reel çözümler elde etmek için biraz daha işlem gerekecektir.

Çözümleri yeniden şu şekilde yazabiliriz.

$y_1 = e^{pt}e^{qit}$ ve $y_2 = e^{pt}e^{-qit}$

Bu çözümlerin ikisi de e^{pt}'nin katlarıdır. Fakat $e^{\pm qit}$ hala i sanal sayısını içerir.

Euler formülü kullanılarak e^{iqt} yeniden yazılabilir.

Euler formülü: $e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i * \sin\theta$, $e^{-i\theta} \equiv \cos\theta - i * \sin\theta$

Böylece, $e^{iqt} \equiv \cos qt + i * \sin qt$, $e^{-iqt} \equiv \cos qt - i * \sin qt$ olacaktır.

Genel çözüm ise aşağıdaki gibi bulunacaktır.

$y = c_1e^{(p+qi)t} + c_2e^{(p-qi)t} = e^{pt}(c_1e^{qit} + c_2e^{-qit})$

$= e^{pt}[c_1(\cos qt + i * \sin qt) + c_2(\cos qt - i * \sin qt)]$

$= e^{pt}[k_1 \cos qt + k_2 \sin qt)]$

Burada $k_1 = c_1 + c_2$, $k_2 = (c_1 - c_2)i$'dir.

y reel olduğu için k_1 ve k_2 de reel olmak zorundadır.

Örnek: $36y'' + 36y' + 13y = 0$

Bir çözüm $y = e^{rt}$, $y' = re^{rt}$, $y'' = r^2e^{rt}$ olduğundan,

$36r^2e^{rt} + 36re^{rt} + 13e^{rt} = 0$ bulunur.

$e^{rt}(36r^2 + 36r + 13) = 0$, $r_{1,2} = \frac{-36\pm\sqrt{36^2-4*36*13}}{72} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{3}i$,

Genel çözüm aşağıdaki gibidir.

$y = e^{-\frac{1}{2}t}[k_1 \cos\frac{1}{3}t + k_2 \sin\frac{1}{3}t)]$

II- ÖZEL İNTEGRAL

Sabit katsayılar ve sabit terim durumunda ($ay'' + by' + cy = R$) özel integrali bulmak için daha önce olduğu gibi en basit çözümü deneyebiliriz: y bir sabittir (y = k). Bu durumda

$y' = y'' = 0$ ve

$a * 0 + b * 0 + ck = R$, k = R/c bulunur.

Örnek: $6y'' + y' - 2y = 6$

Dana önce tamamlayıcı fonksiyon $y = k_1e^{(\frac{1}{2})t} + k_2e^{(-\frac{2}{3})t}$ olarak bulunmuştu.

Özel integral k = R/c = 6/(–2) = –3 olduğundan genel çözüm aşağıdaki gibidir.

$y(t) = k_1e^{\left(\frac{1}{2}\right)t} + k_2e^{\left(-\frac{2}{3}\right)t} - 3$

III- İSTİKRAR

İkinci sıra türevsel denklemlerin istikrarı, birinci sıra türevsel denklemlerin istikrarıyla yakından ilgilidir.

Başlangıç koşullarındaki küçük bir değişikliğin çözümün uzun dönem davranışı üzerinde hiçbir etkisi yoksa sistem istikrarlıdır denir. Eğer etkiliyorsa istikrarsızdır.

$ay'' + by' + cy = R$ fonksiyonunun çözümünün iki bölümden oluştuğu söylenmişti: y_c yani indirgenmiş denklemin genel çözümü $(k_1e^{r_1t} + k_2e^{r_2t})$ ve y_p yani toplam denklemin herhangi bir çözümü. Eğer t sonsuza giderken $(t \to \infty)$ indirgenmiş denklemin genel çözümü sıfıra gidiyorsa $(k_1e^{r_1t} + k_2e^{r_2t} \to 0)$ denklem istikrarlıdır. Böylece çözüm y_p'ye yaklaşır ve y_p başlangıç koşullarından bağımsızdır. Böylece $t \to \infty$ iken başlangıç koşullarının etkisi ortadan kalkar. Karmaşık kök durumunda $p < 0$ olması istikrar için yeterlidir.

Örnek: $y'' + 2y' + y = 3$

$r^2 + 2r + 1 = 0$ olduğundan $r_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2} = -1$

$y_c = e^{-t}(k_1 + k_2t)$, $y_p = 3$ ve genel çözüm $y(t) = e^{-t}(k_1 + k_2t) + 3$'tür.

$y(0) = k_1 + 3$, $k_1 = y(0) - 3$ böylece k_1 belirlendi. k_2'yi bulmak için y(1) kullanılabilir.

$y(1) = e^{-1}(y(0) - 3 + k_2) + 3$'tür. Böylece $k_2 = (y(1) - 3)e - (y(0) - 3)$

Belirli çözüm: $y(t) = e^{-t}\{(y(0) - 3) + [(y(1) - 3)e - (y(0) - 3)]t\} + 3$'tür

y(0) = y(1) = 3 ise y(t) = 3 olur. Bu denge değeridir.

Eğer y(0), y(1) ≠ 3 ise $t \to \infty$ iken $y_c \to 0$ olacağından model istikrarlıdır.

1.9 İKTİSADİ UYGULAMALAR (İkinci Sıra Türevsel Denklemler)

I- FİYAT BEKLENTİLERİNİ İÇEREN BİR PİYASA MODELİ

Diyelim ki bir mala olan talep yalnızca fiyat düzeyinin değil, fiyat trendlerinin de bir fonksiyonudur: $D = D[P(t), P'(t), P''(t)] = a - bP + mP' + nP''$. Burada D mala olan talebi, P malın fiyatını gösterir ve a, b, m, n parametrelerdir (a, b > 0).

Fiyatın zamana göre birinci türevi (P') cari enflasyonu gösterir. Fiyatlar artıyorken tüketiciler fiyat artışlarının devam edeceğini düşünüyorlarsa cari tüketimlerini arttırabilir. Bu durumda m > 0 olması beklenir. Devam etmeyeceğini düşünüyorlarsa fiyatların düşmesini bekleyip cari alımlarını durdurabilirler. Bu durumda $m < 0$ olması beklenir. Dolayısıyla $m \lesseqgtr 0, n \lesseqgtr 0$ olabilir.

Basitlik amacıyla, arzın sadece fiyatın fonksiyonu olduğunu varsayalım:

$S = -\alpha + \beta P, \quad (\alpha, \beta > 0)$

Dengede D = S olması gerektiğinden $a - bP + mP' + nP'' = -\alpha + \beta P$,

$nP'' + mP' - (b + \beta)P = -(a + \alpha)$

Bu modelde tüm noktalarda arz ve talebin eşit olduğu varsayılmaktadır. Bu nedenle fiyat uyum mekanizması $(\frac{dP}{dt} = \lambda(D - P))$ yoktur. Bu modeli dinamik yapan fiyat uyum mekanizması değil talebin beklentileri içermesidir.

Çözüm:

Yardımcı denklem: $nr^2 + mr - (b + \beta) = 0$, $r_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4n(b+\beta)}}{2n}$

Eğer $m^2 + 4n(b + \beta) > 0$ ise farklı reel kökler vardır: $P_c = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}$

Eğer $m^2 + 4n(b + \beta) = 0$ ise tek reel kök vardır: $P_c = e^{rt}(k_1 + k_2 t)$

Eğer $m^2 + 4n(b + \beta) < 0$ ise karmaşık kökler vardır: $P_c = e^{pt}[k_1 \cos qt + k_2 \sin qt)]$,

$p = -\frac{m}{2n}, q = \frac{\sqrt{-(m + 4n(\beta + b)}}{2n}$

Örnek: $D = 42 - 4P - 4P' + P''$, $\quad S = -6 + 8P$

Dengede $42 - 4P - 4P' + P'' = -6 + 8P$, $\quad P'' - 4P' - 12P = -48$

Yardımcı denklem: $r^2 - 4r - 12 = 0$ olduğundan $r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2}$,

$r_1 = 6$, $\quad r_2 = -2$

Tamamlayıcı fonksiyon: : $P_c = k_1 e^{6t} + k_2 e^{-2t}$

Özel integral: : $P_p = \frac{-48}{-12}$

Genel çözüm: : $P(t) = k_1 e^{6t} + k_2 e^{-2t} + 4$

$t \to \infty$ iken $k_1 e^{6t} + k_2 e^{-2t} \to \infty$ olduğundan istikrarsızdır.

II- ENFLASYON-İŞSİZLİK İLİŞKİSİ

Enflasyon ve işsizlik arasındaki ilişkiyi belirleyen Phillips ilişkisi aşağıdaki gibidir.

$\dot{p} = \alpha - \beta U$, $\quad \alpha, \beta > 0$

Daha yakın zamanda Phillips ilişkisi beklentileri de içerecek şekilde genişletilmiştir.

(1) $\dot{p} = \alpha - \beta U + h\pi$, $\quad 0 < h < 1$

Burada π beklenen enflasyon oranıdır. Enflasyon beklentisi enflasyonu arttırır ancak kendisinden daha fazla oranda arttırmaz.

Uyarlanmış beklentiler varsayımı yapılırsa:

(2) $\dot{\pi} = j[\dot{p} - \pi]$ $\quad 0 < j < 1$

Beklenen enflasyon oranı, önceki enflasyon oranının bir fonksiyonudur. Diğer bir deyişle, insanlar her zaman enflasyonu olduğundan düşük ya da yüksek tahmin edebilir. Beklenen enflasyon ile gerçekleşen enflasyon arasındaki farka bağlı olarak beklentiler değiştirilir. Bu değişmenin hızı j katsayısı tarafından belirlenir.

Bu ilişkilere ek olarak enflasyonun da işsizlik üzerindeki etkisi modele katılabilir:

(3) $\dot{U} = -k(\dot{m} - \dot{p}) \quad k > 0$

Burada $\dot{m}$ nominal para arzı artış hızıdır. Reel para arzı artış hızı $(\dot{m} - \dot{p})$ ekonomide genişlemeye yol açarak işsizliği azaltabilir.

(1), (2) ve (3) numaralı denklemler beklentilerin zaman içindeki değişimini gösteren bir türevsel denklem vermektedir. (1) no'lu denklem (2)'de yerine konulur ve zamana göre türevi alınırsa

$\dot{\pi} = j(\alpha - \beta U + h\pi) - j\pi$

$\ddot{\pi} = -j\beta\dot{U} + j(h-1)\dot{\pi}$

burada (3) no'lu denklemin yerine konulması sonucu ise

(4) $\ddot{\pi} = -j\beta(-k\dot{m} + k\dot{p}) + j(h-1)\dot{\pi}$

Denklem (2)'den $\dot{p} = \frac{1}{j}\dot{\pi} + \pi$ bulunur. Bu, (4)'te yerine konulursa,

$\ddot{\pi} = [j(h-1) - \beta k]\dot{\pi} - j\beta k\pi + j\beta k\dot{m}$ veya

$\ddot{\pi} + [\beta k - j(h-1)]\dot{\pi} + j\beta k\pi = j\beta k\dot{m}$ bulunur. Para arzı atrışının sabit olduğu varsayımıyla $\dot{m} = \overline{m}$'dır. Ayrıca $a = \beta k - j(h-1)$ ve $b = j\beta k$ dersek aşağıdaki türevsel denkleme ulaşırız.

$\ddot{\pi} + a\dot{\pi} + b\pi = b\overline{m}$

Yardımcı denklem: $r^2 + ar + b = 0$ olduğundan $r_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$

Tamamlayıcı fonksiyon: : $\pi_c = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}$

Özel integral: : $\pi_p = \frac{b\overline{m}}{b} = \overline{m}$

Genel çözüm: : $\pi(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t} + \overline{m}$

İstikrar:

- İki reel kök olması durumunda ($a^2 > 4b$ iken)

  $r_1 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2} < 0$'dır. $r_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ da negatif ise model istikrarlıdır. Bunun için $\sqrt{a^2 - 4b} < a$ veya $b > 0$, yani $j\beta k > 0$ olmalıdır. Daha önce $\beta > 0$, $0 < j < 1$ ve $k > 0$ olduğu belirtilmiştir. Bu durumda model istikrarlıdır.

- Karmaşık kök durumunda ($a^2 < 4b$ iken) istikrar için $p = \frac{-a}{2} < 0$ olması yeterlidir. Diğer bir deyişle, $a = \beta k - j(h - 1) > 0$ ise model istikrarlıdır.