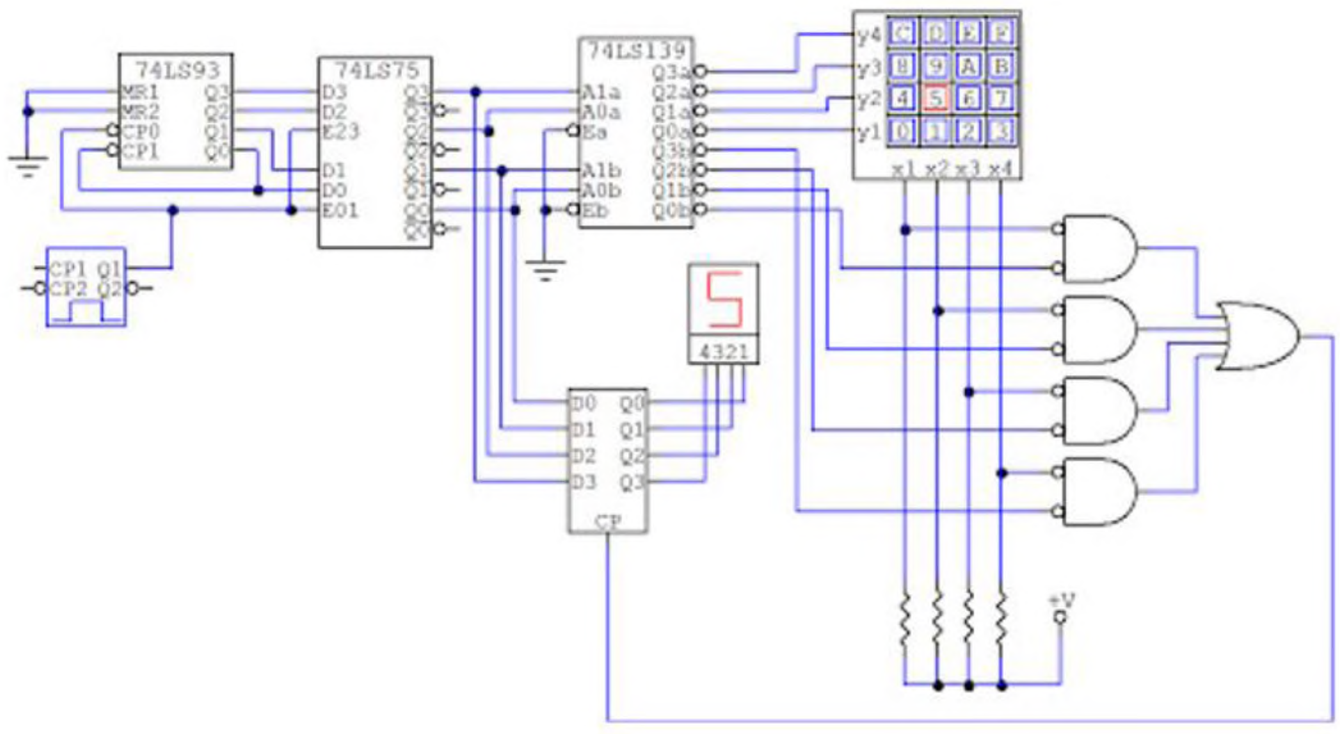
SAYISAL DEVRE TASARIMI

Mustafa NUMANOĞLU

Sayısal Devre Tasarımı

- Boolean ifadesinden mantık kapıları arasında uygun bağlantılar yapılması ile sayısal devrenin elde edilmesi işlemine sayısal devre tasarımı adı verilir.

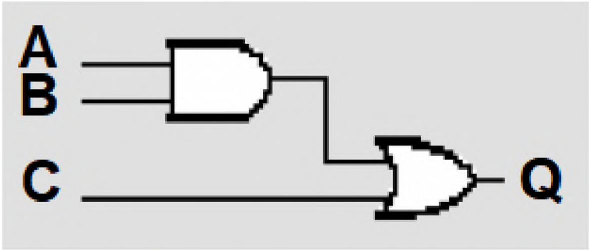


Boolean İfadesinden Sayısal Devrelerin Tasarımı

- Devre tasarlanırken ilk önce Boolean ifadesinde kaç tane giriş değişkeninin olduğu, daha sonra bu değişkenlerin hangi Boolean işlemine uygulandığı bulunmalıdır. Çizim sırasında Boolean matematiği işlem sırası takip edilmelidir. İşlem sırası parantez, DEĞİL, VE, VEYA şeklindedir.
- **Örnek:** Q = A.B+C ifadesini gerçekleştirecek sayısal devreyi tasarlayalım.
- **Çözüm:** Q = A.B+C ifadesinde A,B,C üç giriş değişkenini, Q ise çıkış değişkenini göstermektedir. İşlemin gerçekleştirilmesine Boolean çarpma ile başlanır. Boolean çarpma işlemi VE kapısı ile gerçekleşeceğinden, ilk adımda A ile B değişkenlerinin VE kapısına uygulanması gerekir.

Boolean İfadesinden Sayısal Devrelerin Tasarımı

- Boolean çarpma işlemi ile elde edilen ifade (A.B), diğer giriş değişkeni ile Boolean toplama işlemine tabi tutulur. Boolean toplama işlemi VEYA kapısı ile gerçekleşeceğinden A.B ifadesi C ile VEYA kapısına uygulanır.



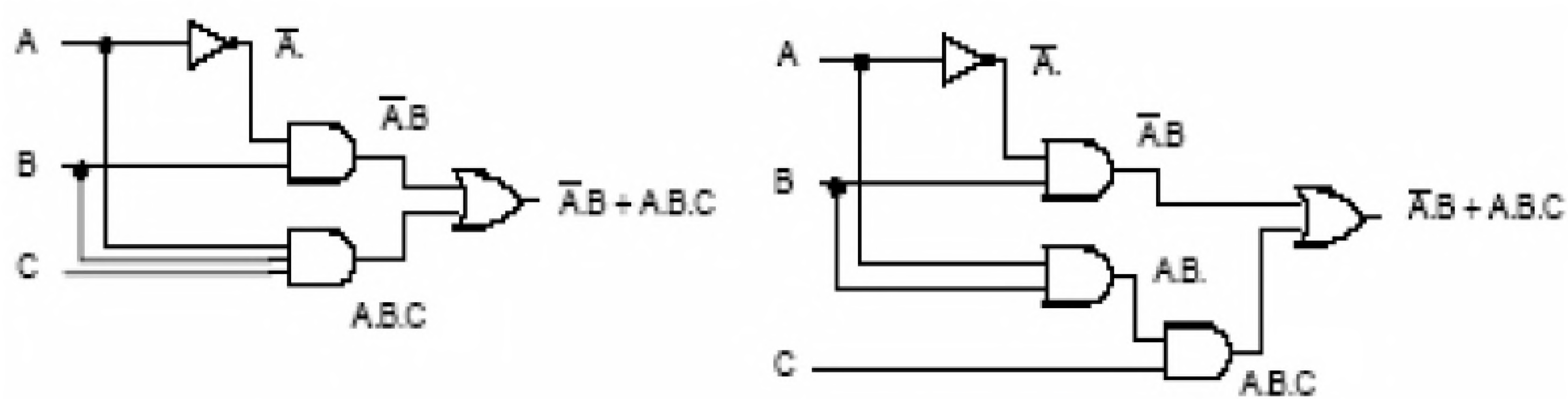
Q=A.B+C ifadesine ait sayısal devre

- Verilen Q = A.B+C boolean ifadesi "A VE B VEYA C" şeklinde okunur.

Boolean İfadesinden Sayısal Devrelerin Tasarımı

- **Örnek:** Q = Ā.B+A.B.C ifadesini gerçekleştirecek sayısal devreyi tasarlayalım.
- **Çözüm:** Verilen Boolean ifadesinin çizimine öncelikle VE kapıları ile ifade edilen Boolean çarpma işlemi ile başlarız. Ancak VE kapılarına uygulanacak değişkenlerden DEĞİL olan varsa, öncelikle bu değişken DEĞİL kapısına uygulanarak bu işlem (Ā) gerçekleştirilir.
- DEĞİL'i alınan değişken diğer değişken (B) ile VE kapısına (Ā.B) uygulanır. Elde edilmek istenen A.B.C ifadesinde üç değişkenin VE kapısına uygulanması gerektiğinden üç girişli bir VE kapısı ve iki girişli iki VE kapısının ardı ardına bağlanması ile bu işlem gerçekleştirilir. Elde edilen bu iki ifade VEYA kapısına uygulanarak devrenin çizimi tamamlanır.

Boolean İfadesinden Sayısal Devrelerin Tasarımı



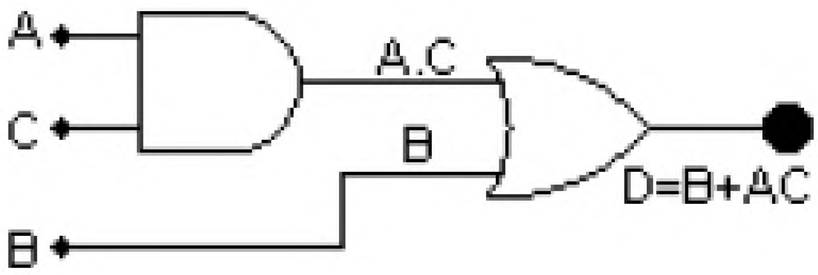
a) Üç girişli VE kapıları kullanarak **b) İki girişli VE kapıları kullanarak**

Q = Ā.B + A.B.C ifadesine ait devre çizimleri

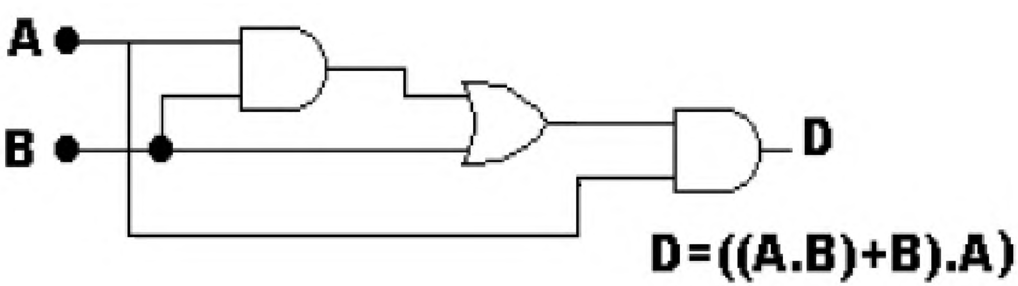
- Q = Ā.B +A.B.C ifadesine ait sayısal devre hem iki ve üç girişli VE kapıları ile hem de sadece iki girişli VE kapıları kullanılarak çizilmiştir.

Boolean İfadesinden Sayısal Devrelerin Tasarımı

- Örnek: D=B+A.C ifadesini lojik kapıları kullanarak çizelim.

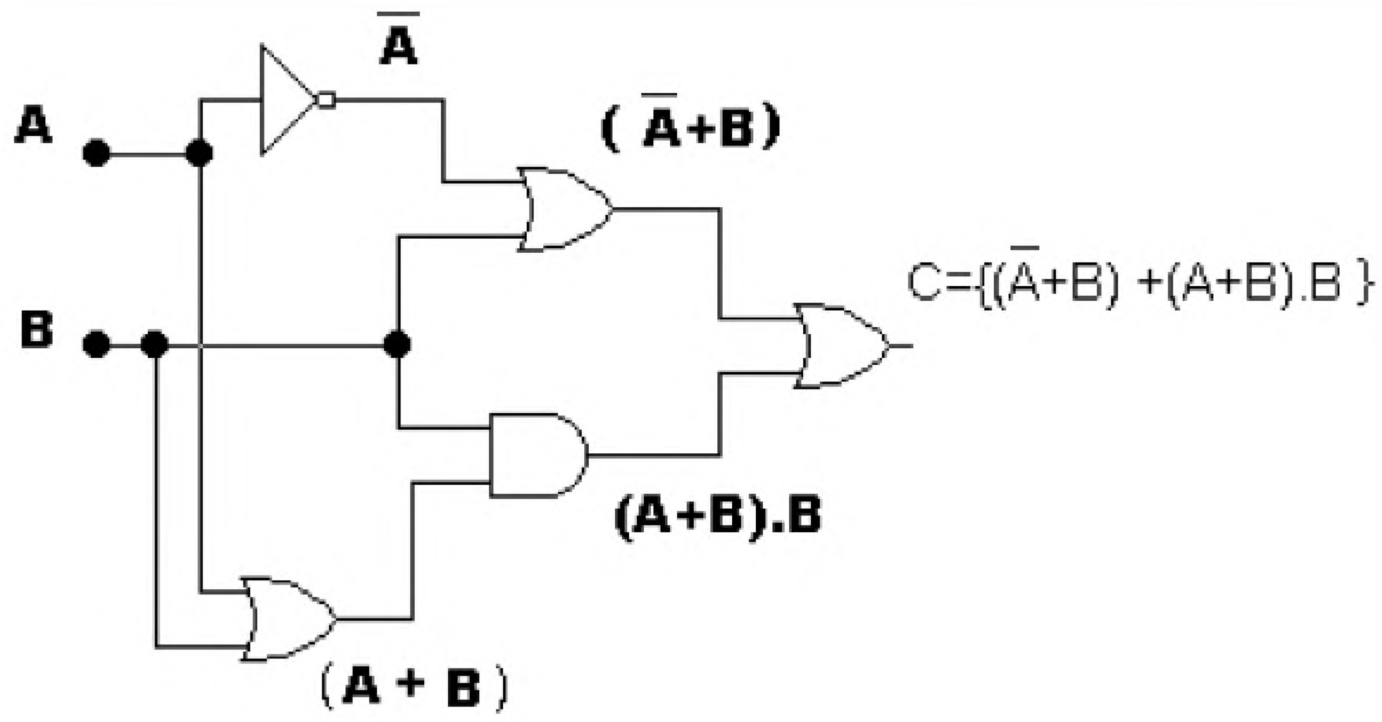


- Örnek: D=((A.B)+B).A ifadesini lojik kapıları kullanarak çizelim.



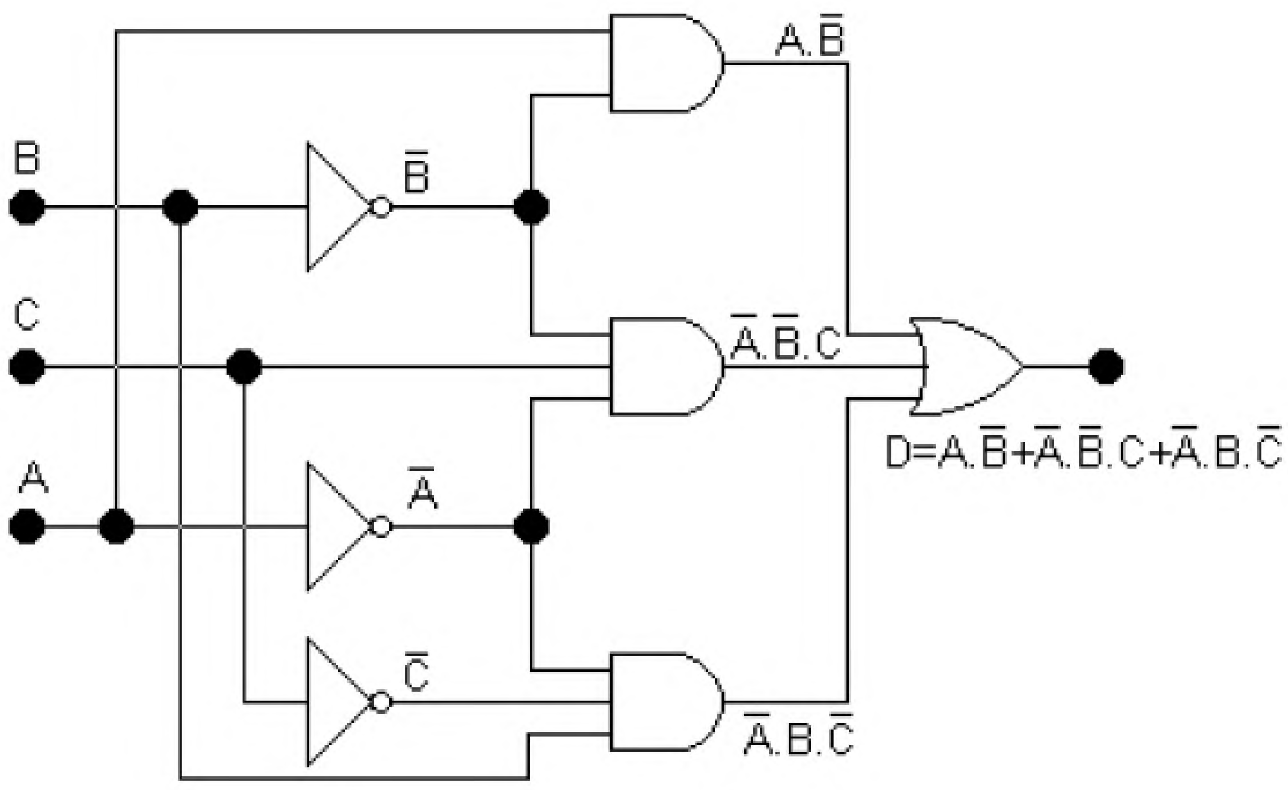
Boolean İfadesinden Sayısal Devrelerin Tasarımı

- Örnek: C={(A'+B)+(A+B).B} ifadesini lojik kapıları kullanarak çizelim.



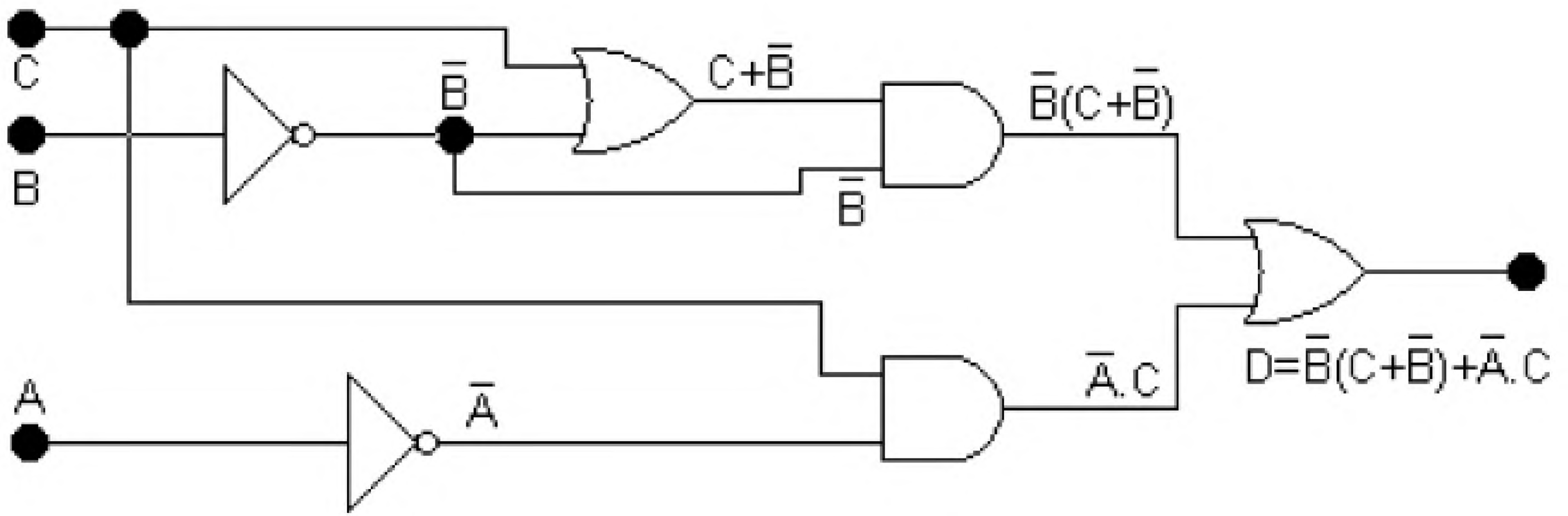
Boolean İfadesinden Sayısal Devrelerin Tasarımı

- Örnek: D=A.B' +A'.B'.C+A'.B.C' ifadesini lojik kapıları kullanarak çizelim.



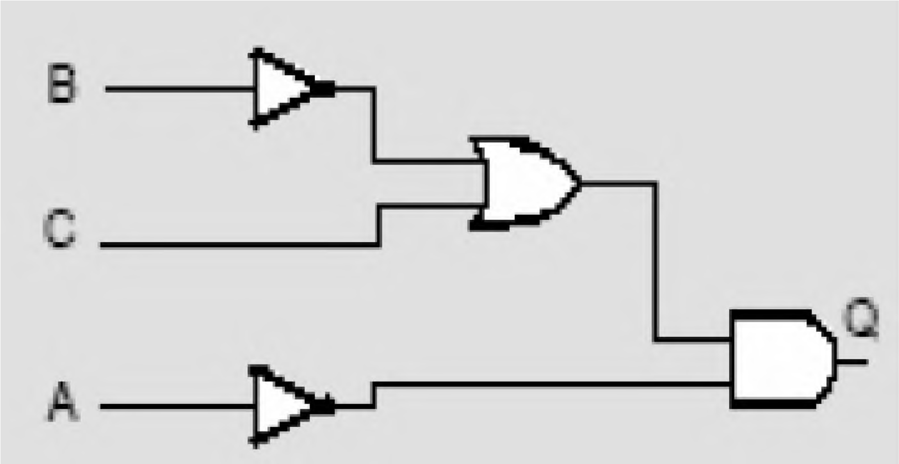
Boolean İfadesinden Sayısal Devrelerin Tasarımı

- Örnek: $D=B'(C+B')+A'.C$ ifadesini lojik kapıları kullanarak çizelim.



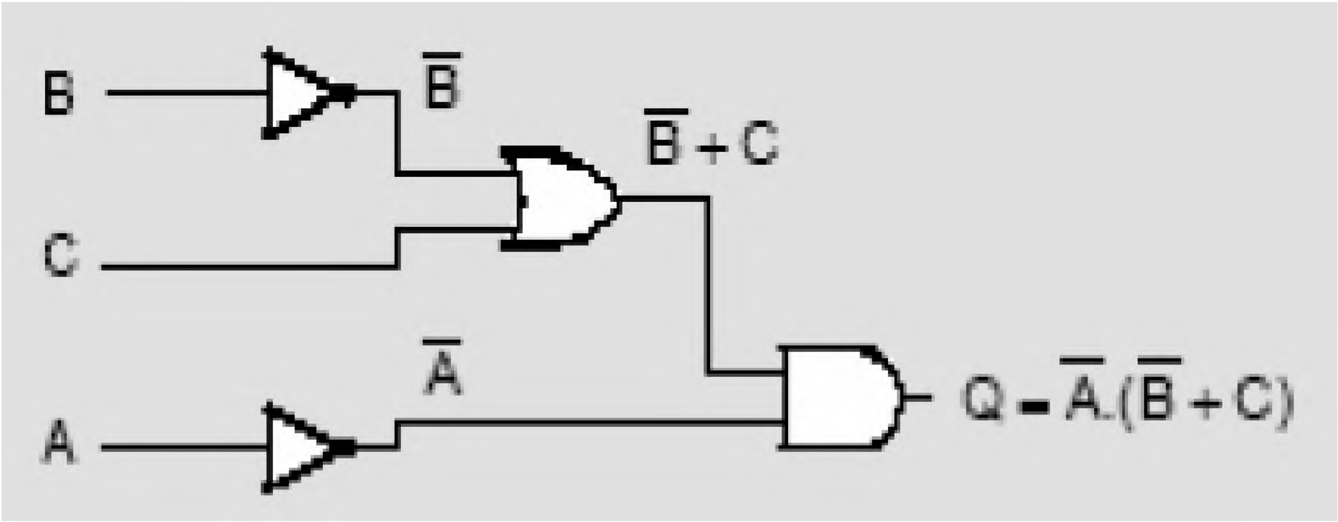
Sayısal Devreden Boolean İfadesinin Elde Edilmesi

- Tasarlanmış bir sayısal devreden Boolean ifadesinin elde edilebilmesi için ilk önce kapı girişlerine uygulanan değişkenler belirlenir. Her kapı çıkışına ait Boolean ifadesi yazılır. Bu işlem devredeki en son kapıya kadar sürdürülür.
- **Örnek:** Aşağıda verilen sayısal devrenin çıkışına ait Boolean ifadesini bulalım.



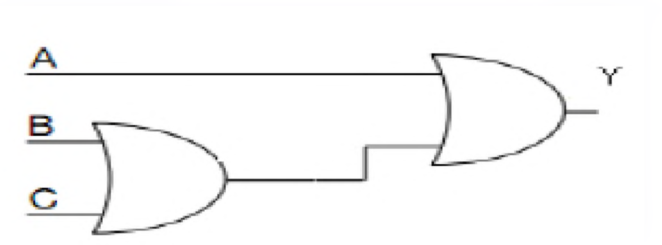
Sayısal Devreden Boolean İfadesinin Elde Edilmesi

- **Çözüm:** Her bir kapı giriş ve çıkış ifadesi devredeki son kapıya kadar yazılarak ifade elde edilir.

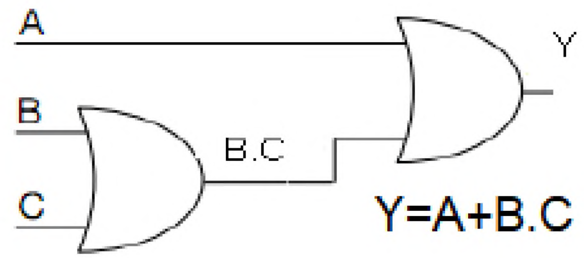


Sayısal Devreden Boolean İfadesinin Elde Edilmesi

- **Örnek:** Aşağıda verilen sayısal devrenin çıkışına ait Boolean ifadesini bulalım.



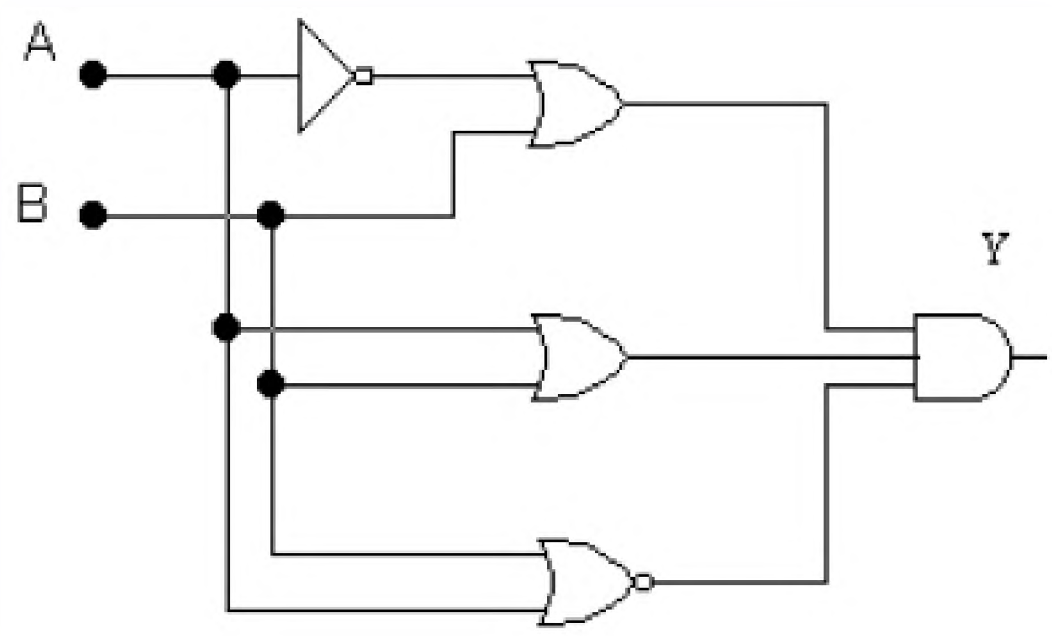
- **Çözüm:** Her bir kapı giriş ve çıkış ifadesi devredeki son kapıya kadar yazılarak ifade elde edilir.



- Her kapı çıkışına çıkış ifadesi yazılır. Böylece sonuca adım adım gidilir.

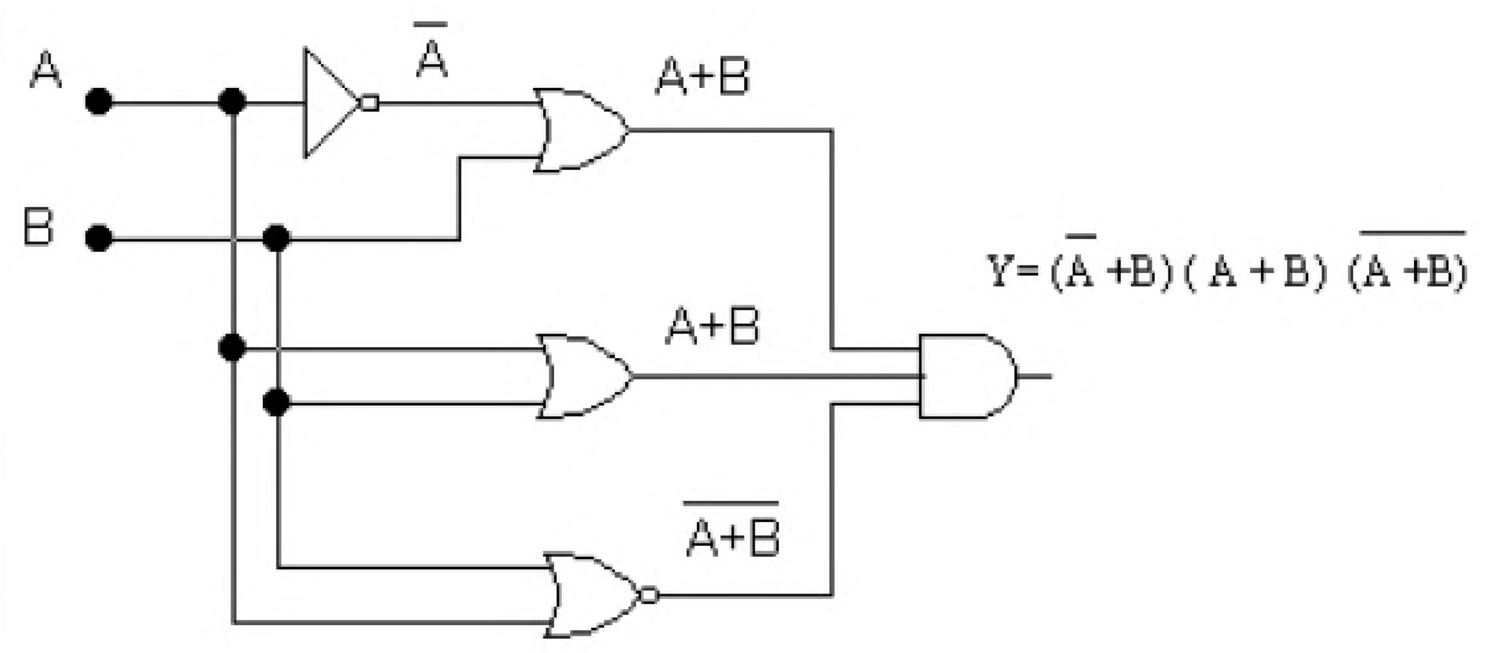
Sayısal Devreden Boolean İfadesinin Elde Edilmesi

- **Örnek:** Aşağıda verilen sayısal devrenin çıkışına ait Boolean ifadesini bulalım.



Sayısal Devreden Boolean İfadesinin Elde Edilmesi

- **Çözüm:** Her bir kapının girişine ve çıkışına ait ifadesi yazılarak çıkış ifadesi elde edilir.



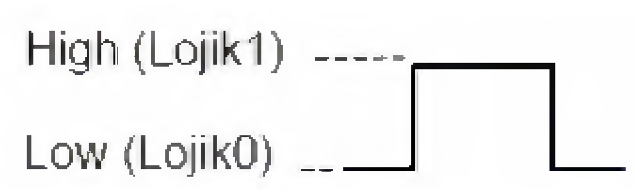
Dalga Diyagramının Çizilmesi

- Sayısal sistem iki gerilim seviyesine göre çalışır. Her sayısal sistemin bu iki gerilim seviyesine karşılık gelen bir biçimi olmalıdır. Bu nedenle sayısal devreler binary (İkilik) sayı sisteminde kullanılan 1 ve 0 ile tanımlanmak zorundadır. Bu sayısal sistemin girdilerinin ikilik koda dönüşmesini sağlar. Aşağıdaki pozitif mantık ifadelerini kullanarak sayısal kavramları tanımlayabileceğiz. Örneğin bir anahtarın kapalı olması sayısal sistemde '1' veya 5V'a eşit olacaktır.

Yüksek	Alçak
1	0
Doğru	Yanlış
+5V	0V
Kapalı	Açık

Dalga Diyagramının Çizilmesi

- Bir kare dalganın yükseleme ve düşmesinin çok küçük zaman diliminde olduğu düşünülürse kare dalga sayısal sinyallere güzel bir örnek olabilir. Aşağıda bir kare dalga üzerindeki lojik seviyeler gösterilmiştir.



- Sayısal (dijital) elektronikte, bir devre tasarımı yapılırken o devreye ait lojik ifade doğruluk tablosu oluşturulur. Bu lojik ifadeye göre doğrudan devre kurulursa maliyet artar. İfadenin en son hâlinin bulunması gerekir. Boolean matematiği ile bu denklemlerin en sade hâle getirilmesi sayısal (lojik) denklemlerin çözümü yapılmaktadır.

Dalga Diyagramının Çizilmesi

- En sade hâle gelen ifadenin ya da denklemin doğruluk tablosu yapılarak bu denklemin çıkış dalga diyagramını elde etmek mümkündür.
- **Örnek**: Y= A.C+B ifadesinin doğruluk tablosunu hazırlayalım. A,B,C gibi üç değişken olduğundan tablo 2^3 =8 farklı değer olan bir tablo olacaktır.
- Bu tablo bize Y= A.C+B ifadesinin girişlerinin aldığı değere (lojik 0 veya lojik 1) göre çıkışın hangi değeri (lojik 0 veya lojik 1) alacağını göstermektedir.

Dalga Diyagramının Çizilmesi

	Değişkenler			A ve C nin sonucu		Çıkış İfadesi Y
Sıra	A	B	C	A.C	A.C+B	A.C+B
0	0	0	0	0	0+0	0
1	0	0	1	0	0+0	0
2	0	1	0	0	0+1	1
3	0	1	1	0	0+1	1
4	1	0	0	0	0+0	0
5	1	0	1	1	1+0	1
6	1	1	0	0	0+1	1
7	1	1	1	1	1+1	1

- Tabloyu diyagram hâline getirmek istersek yapmamız gereken lojik devrelerde kullanılan kare dalgayı uygun şekilde çizmektir.

Dalga Diyagramının Çizilmesi

C Girişi	0	1	0	1	0	1	0	1
B Girişi	0	0	1	1	0	0	1	1
A Girişi	0	0	0	0	1	1	1	1
A.C	0	0	0	0	1	0	0	1
(A.C+B)	0	0	1	1	0	1	1	1
Sıra	0	1	2	3	4	5	6	7

- Dalga diyagram tablosunda görüldüğü gibi A,B,C değişkenlerinin, A.C ifadesinin ve (A.C+B) çıkış ifadesinin dalga şeklinin çizilmesi doğruluk tablosunda çıkan ifadelere göredir. Çıkış ifadesi 0,1 ve 4. sırada 0, diğer durumlarda 1’dir. Bu durum diyagramda görülmektedir.

Boolean İfadelerinin Sadeleştirilmesi

- Çoğu zaman sayısal bir devre için elde edilen Boolean ifadesi uzun ve karmaşık olabilir. Devreyi bu haliyle tasarlamak işlemin maliyetinin artmasını ve hata yapma olasılığını beraberinde getirmektedir. Boolean teorem, kural ve kanunular yardımı ile ifadeler sadeleştirilerek daha az sayıda mantık kapısı ile sayısal devreler tasarlanabilir.
- Örnek: $Q=B.C+B.(C+A)+C.(B'+A)$ ifadesini Boolean teoremleri yardımı ile sadeleştirelim.

Boolean İfadelerinin Sadeleştirilmesi

I.Adım: Dağılma kanununu ikinci ve üçüncü terimlere uygularsak ifade aşağıdaki gibi olacaktır.

$$Q = B.C + B.C + A.B + \overline{B}.C + A.C$$

II.Adım: Birinci ve ikinci terimi "B" değişkeni ortak parantezine alırsak ifade

$$Q = B.(C + C) + A.B + \overline{B}.C + A.C$$

III.Adım: VEYA özdeşlikleri ile (C+C=C)

$$Q = B.C + A.B + \overline{B}.C + A.C$$

IV.Adım: Birinci ve üçüncü terimi "C" değişkeni ortak parantezine alırsak

$$Q = C(B + \overline{B}) + A.B + A.C$$

V.Adım: VEYA özdeşlikleri ile $(B + \overline{B} = 1)$

$$Q = C + A.B + A.C$$

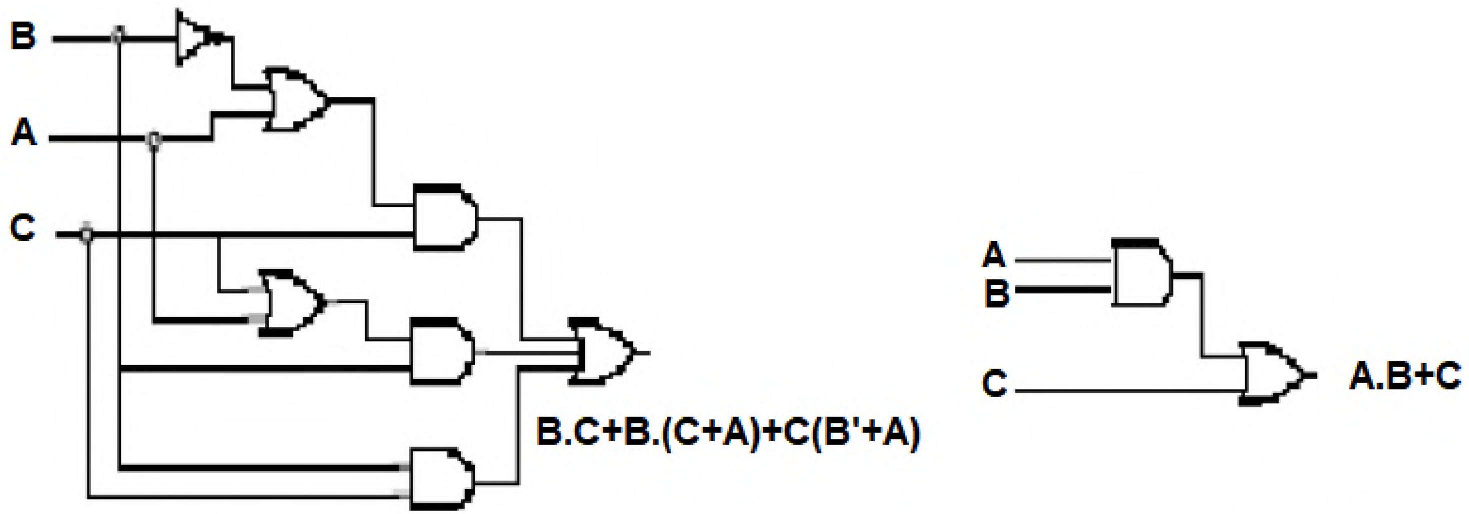
VI.Adım: Birinci ve üçüncü terimi "C" ile ortak paranteze alırsak

$$Q = C(1 + A) + A.B$$

VII.Adım: VEYA özdeşlikleri yardımı ile (1+A=1)

$$Q = C + A.B$$

Boolean İfadelerinin Sadeleştirilmesi



a) Sadeleştirmden Önceki Devre Şeması   *b) Sadeleştirmeden Sonraki Devre Şeması*

Boolean İfadelerinin Elde Edilmesi

- Bir doğruluk tablosu tasarımcı tarafından sayısal devrenin çalışmasına yönelik oluşturulmuş ve giriş değişkenlerinin durumuna bağlı olarak çıkışın ne olması gerektiği anlatan tablodur.
- Tasarım aşamasında en önemli işlemlerden biri olan doğruluk tablosunu oluşturduktan sonra ifadenin mantık kapıları ve bu kapıların birbirleriyle olan bağlantılarının elde edilebilmesi için tablodan Boolean ifadesinin elde edilmesi gerekmektedir.

Boolean Açılımları ve Standart Formlar

- Boolean ifadeleri fonksiyonun doğruluk tablosundan elde edilen iki temel açılımdır.
- Bu ifadeler eğer bir sadeleştirme işlemi uygulanmazsa az sayıda değişken içermesi ender olarak karşılaşılan bir durumdur.
- Boolean ifadelerinin yazıldığı iki temel açılım minterimlerin toplamı ve maxterimlerin çarpımı olarak gösterilebilirler.

Minterim ve Maxiterim

- İkili bir değişken Boolean ifadesi olarak değişkenin kendisi (A) veya değişkenin değili (A') şeklinde gösterilebilir. VE kapısına uygulanan A ve B değişkenlerinin iki şekilde Boolean ifadesi yazılabileceğinden bu değişkenlerin alabileceği dört durum söz konusudur. Bu dört durum minimum terim veya standart çarpım adını alır. Benzer şekilde n sayıda değişken için 2^n kadar minimum terim yazılabilir. Yanda üç değişkene ait minimum terimleri göstermektedir.

A	B	C	Minterimler	
			Terim	Sembol
0	0	0	$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$	m_0
0	0	1	$\overline{A}.\overline{B}.C$	m_1
0	1	0	$\overline{A}.B.\overline{C}$	m_2
0	1	1	$\overline{A}.B.C$	m_3
1	0	0	$A.\overline{B}.\overline{C}$	m_4
1	0	1	$A.\overline{B}.C$	m_5
1	1	0	$A.B.\overline{C}$	m_6
1	1	1	$A.B.C$	m_7

Minterim

- Üç değişkenin alabileceği sekiz (2^3) durum olduğundan 0'dan 7'ye kadar olan onluk sayıların ikilik karşılıkları, yazılabilecek durumları vermektedir. Her bir değişken ikilik sayıda eğer "0" ise değili, "1" ise değişkenin kendisi yazılarak bulunur.
- Minimum terim Boolean ifadesini "1" yapan terimdir. Her bir minimum terim mj şeklinde gösterilir. Burada j indisi ilgili ikilik sayının onluk karşılığıdır.

Maxterim

- Benzer biçimde n kadar değişken için değişkenin kendisi ve değili olmak üzere VEYA işlemini ile birleştirilmiş 2^n kadar durum yazılabilir. VEYA işlemi ile birleştirilmiş bu durumlar ise maksimum terimler veya standart toplama adını alırlar. Üç değişkene ait maksimum terimler Yanda verilmiştir. Her maxterim üç değişkenin VEYA işlemi ile birleştirilmiş halinden elde edilir ve burada ikilik sayıda değişken 0 ise değişkenin kendisi, 1 ise değişkenin değili yazılarak bulunabilir.

A	B	C	Maxterimler Terim	Maxterimler Sembol
0	0	0	$A+B+C$	M_0
0	0	1	$A+B+\overline{C}$	M_1
0	1	0	$A+\overline{B}+C$	M_2
0	1	1	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3
1	0	0	$\overline{A}+B+C$	M_4
1	0	1	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5
1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6
1	1	1	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7

Minterimlerin Toplamı

- Bir önceki konuda n sayıda değişkene ait 2^n sayıda minimum terim yazılabileceğini ve bu minimum terimlerin fonksiyonu T yapan terimler olduğu anlatılmıştı.
- Boolean fonksiyonunu minterimlerin toplamı (çarpımların toplamı) cinsinden ifade edebilmek için fonksiyonun T olduğu her durum için minimum terimler bulunur. Bulunan bu minimum terimler VEYA'lanarak fonksiyon minterimlerin toplamı (çarpımların toplamı -Product-of-sums (POS) form-) cinsinden yazılabilir.
- Çarpımların toplamı şeklindeki eşitliklerde önce VE işlemi kullanılarak çarpma yapılır ve sonra birden fazla çarpım VEYA işlemi kullanılarak toplanır.

Minterimlerin Toplamı

- **Örnek:** Aşağıdaki doğruluk tablosundan lojik ifadeyi minterimler cinsinden bulalım.

A	B	C	Q
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

- **Çözüm:** Doğruluk tablosunda çıkış ifadesinin '1' olduğu her duruma ait minterim bulunduktan sonra bu terimler VEYA'lanarak lojik ifade elde edilir.

A	B	C	Q		
0	0	0	1	$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$	m_0
0	0	1	1	$\overline{A}.\overline{B}.C$	m_1
0	1	0	0		
0	1	1	0		
1	0	0	0		
1	0	1	1	$A.\overline{B}.C$	m_5
1	1	0	0		
1	1	1	1	$A.B.C$	m_7

Miniterimlerin Toplamı

- Yazılan minterimlerin her birisinin çıkışı 1 yapan terimler olduğu doğruluk tablosundan görülmelidir. Minterimlerin VEYA 'lanması ile elde edilen ifade çıkışın 1 olduğu tüm durumları kapsayacaktır.
  $Q = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.C + A.\overline{B}.C + A.B.C$ veya $Q = m_0 + m_1 + m_5 + m_7$ şeklinde yazılabilir. Çoğu durumda doğruluk tablosunu vermek yerine aşağıdaki gösterimde kullanılabilir.

  $$Q(A,B,C) = \sum(0,1,5,7)$$

- Burada Σ sembolü parantez içinde verilen minimum terimlerin VEYA 'lanması ile lojik ifadenin elde edileceğini anlatır. Çıkış ifadesini gösteren terimden (Q) sonra gelen parantez bu fonksiyonda kaç değişkenin (A,B,C) olduğunu göstermektedir.

Minterimlerin Toplamı

- Bazı durumlarda Boolean ifadesi minterimlerin toplamı formunda olmayabilir. Fonksiyonu VE terimlerinin VEYA'lanması ile bu forma dönüştürülür. Daha sonra her terimde eksik değişken olup olmadığı kontrol edilir. Eğer terimde eksik değişken veya değişkenler varsa, A eksik değişkeni göstermek üzere $A+\bar{A}$ ifadesi terimle VE'lenerek eksik değişken eklenmiş olur. Bu işlem terim içinde eksik değişken kalmayana kadar devam eder.
- Eksik bir değişken veya değişkenlerin terime eklenilmesi işleminde;

Teorem 1.c. $A.1 = A$

Teorem 2.d. $A + \bar{A} = A$

teoremleri kullanılmaktadır.

Maxterimlerin Çarpımı

- Boolean fonksiyonları maxterimlerin çarpımı olarak da ifade edilebilirler. n sayıda değişkene ait 2^n sayıda maxterim yazılabilir.
- Bu maxterimler fonksiyonun '0' olmasını sağlayan terimlerdir.
- Boolean fonksiyonunu maxterimlerin çarpımı formunda yazmak için fonksiyonun '0' olduğu her duruma ait maxterimler bulunur. Bulunan bu maxterimler VE'lanarak fonksiyon maxterimlerin çapımı (Toplamların Çarpımı -Sum-of-products (SOP) form-) cinsinden yazılabilir.
- Toplamların çarpımı şeklindeki ifadeler birden fazla VEYA işleminin sonucunun VE işlemine tabi tutulmuş halidir.

Maxterimlerin Çarpımı

- **Örnek:** Aşağıdaki doğruluk tablosundan lojik ifadeyi maxterimler cinsinden bulalım.

A	B	C	Q
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

- **Çözüm:** Doğruluk tablosunun çıkış ifadesinin 0 olduğu her duruma ait maksimum terim bulunduktan sonra bu terimler VE 'lenerek lojik ifade elde edilir.

A	B	C	Q	
0	0	0	0	$A+B+C$
0	0	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	0	$\overline{A}+B+C$
1	0	1	0	$\overline{A}+B+\overline{C}$
1	1	0	1	
1	1	1	1	

Maxterimlerin Çarpımı

- Yazılan minimum terimlerin çıkışın '0' olmasını sağlayan terimler olduğu doğruluk tablosundan görülmelidir.

  $$Q = (A + B + C).(\overline{A} + B + C).(\overline{A} + B + \overline{C})$$
  $$Q = M_0.M_4.M_5$$

  yazılabilir. Çoğu durumda doğruluk tablosu yerine

  $Q(A,B,C) = \Pi\,(0,4,5)$ Şeklinde fonksiyon verilebilir. Π sembolü parantez içindeki maxterimlere VE işleminin uygulanacağını gösterirken, çıkış ifadesini (Q) takip eden parantez değişkenleri (A,B,C) göstermektedir.

- Boolean fonksiyonların maxterimlerin çarpımı (toplamların çarpımı) olarak ifade edebilmek için fonksiyonu VEYA terimleri haline getirmek gerekir. Bu işlem; (A+B).(A+C) =A+B.C dağılma kanunu kullanılarak gerçekleştirilir. Daha sonra her bir VEYA teriminde eksik değişken varsa, A eksik değişkeni göstermek üzere, terim $A.\overline{A}$ ile VEYA işlemi yapılır.

İlgili Videolar

- https://www.youtube.com/watch?v=RUpSSejgfto