Kuyruk Teorisi Ders Notları:

Bazı Kuyruk Modelleri

Mehmet YILMAZ

mehmetyilmaz@ankara.edu.tr

10 KASIM 2017

5. HAFTA

2.7 $M/M/1/\infty/\infty$ sistemi için Bekleme zamanının dağılımı

T_j rastgele değişkeni j. birimin hizmet süresi olsun. Biliyoruz ki, $T_j \sim \text{Üstel}\left(\frac{1}{\mu}\right)$ dir. Sistemde rastgele sayıda birim bulunmaktadır. Eğer N rastgele değişkeni sistemde bulunan birim sayısını gösterirse, $N = n$ gözlendiğinde toplam servis zamanı $S = \sum_{j=1}^{n} T_j$ rastgele değişkeni ile gösterilecektir. Bu durumda, S rastgele değişkeninin dağılımı $Gamma(\alpha = n, \beta = \frac{1}{\mu})$ olacaktır. S rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

$$f_S(t) = \frac{\mu^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\mu t}, t > 0$$

şeklindedir. T_q rastgele değişkeni ise sisteme yeni giriş yapan bir birimin bekleme zamanı olsun. T_q rastgele değişkeninin dağılımını iki parçada inceleyeceğiz çünkü sıfır noktası (yani sistemde hiçbir birim yok iken bekleme yapmadan hizmet alacak) bir süreksizlik noktasıdır. $F_q(t)$ ile T_q rastgele değişkeninin dağılımı gösterilirse, $F_q(0)$ birimin serviste hiç beklememesi olasılığıdır. Bu olasılık $F_q(0) = P_0 = 1 - \rho$ dur. İkinci olarak, $T_q > 0$ olduğu durum düşünülecektir. Bekleme zamanının olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_q(t)$ ile gösterilirse, toplam olasılık formülü yardımı ile

$$\begin{aligned} f_q(t) =& \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{Pr\,(S = t | N = n)}_{f_S(t)} \underbrace{Pr(N = n)}_{P_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\mu t} (1-\rho)\rho^n \\ =&(1-\rho)e^{-\mu t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{n+1}}{n!} t^n \rho^{n+1} = \rho\mu(1-\rho)e^{-\mu t} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} t^n \rho^n}_{e^{\rho\mu t}} \qquad (18) \\ =&\rho\mu(1-\rho)e^{-\mu t(1-\rho)} \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Buradan, bekleme zamanının dağılım fonksiyonunu,

$$\begin{aligned} F_q(t) =& F_q(0) + \underbrace{\int_0^t \rho\mu(1-\rho)e^{-\mu t(1-\rho)}dt}_{\rho\left(1-e^{-\mu(1-\rho)t}\right)} = (1-\rho) + \rho\left(1 - e^{-\mu(1-\rho)t}\right) \\ =& 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)t} = 1 - \rho e^{-(\mu-\lambda)t} \end{aligned} \tag{19}$$

olarak elde edilir. Şimdi bu birim başına kuyrukta geçen ortalama süreyi teyit etmek için T_q rastgele değişkeninin beklenen değerini bulalım:

$$W_q = E[T_q] = \int_0^\infty (1 - F_q(t))dt = \int_0^\infty \rho e^{-(\mu-\lambda)t}dt = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi sistemde geiçirilen zamanı göz önüne alalım. Eğer sistemde hiç bir birim yok ise, yeni gelen birim $1/\mu$ ortalama ile hizmet alıp çıkacaktır. Sistemde en az bir birim var ise, sistemde geçirilen zaman, $T = [T_q|T_q > 0]$ rastgele değişkeni ile tanımlanabilir. Buna göre,

$$Pr(T > t) = Pr\left(T_q > t|T_q > 0\right) = \frac{Pr\left(T_q > t\right)}{Pr\left(T_q > 0\right)} = \frac{\rho e^{-(\mu-\lambda)t}}{\underbrace{1 - Pr\left(T_q = 0\right)}_{1-(1-\rho)}} = e^{-(\mu-\lambda)t}$$

olup, $T \sim$Üstel$\left(\dfrac{1}{\mu-\lambda}\right)$ dir. Bu sonuca göre, sistemde ortalama geçirilen zamanı da teyit etmiş olduk.

Örnek 2.2. (Havalanı örneği devam)

(e) uçağın kalkış için hiç beklememesi olasılığını

(f) uçağın kalkış için 5 dakikadan fazla beklemesi olasılığını

(g) Kalkış için sırada en az iki uçağın beklemesi olasılığını

bulunuz.

Çözüm: (e) $P_0 = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$

(f) $Pr\left(T_q > \underbrace{\dfrac{5}{60}}_{saat}\right) = 0.75e^{-\frac{(4-3)5}{60}} = 0.69$

(g) $P_{n\geq 3} = 1 - [P_0 + P_1 + P_2] = 1 - \left[\dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{3}{4}\right)\dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2\dfrac{1}{4}\right] = 0.4219 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^3.$

Özet olması bakımından, $M/M/1/\infty/\infty$ kuyruk sistemi için gerekli formülleri aşağıda verilecektir.

M/M/1 Kuyruk Sistemi için Formüller

λ geliş hızı, gelişler arası zaman $\frac{1}{\lambda}$ ortalamalı üstel dağılım

μ servis hızı, birimlerin servis süresi $\frac{1}{\mu}$ ortalamalı üstel dağılım

n sistemde bulunan birim sayısı

ρ trafik yoğunluğu $\frac{\lambda}{\mu} < 1$

P_0 sistemin boş kalması olasılığı $1 - \rho$

P_n sistemde n birim olması olasılığı $(1 - \rho)\rho^n$

$Pr\,(\text{sistemde en az } k \text{ birim bulunması}) = \rho^k$

L_q kuyrukta olması beklenen birim sayısı $\frac{\rho^2}{1 - \rho}$

L_{servis} serviste olması beklenen birim sayısı ρ

L sistemde olması beklenen birim sayısı $L = L_q + L_{servis} = \frac{\rho}{1 - \rho}$

W_q kuyrukta geçen beklenen süre $\frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{(\mu - \lambda)} = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)\mu}$

W_{servis} serviste geçen beklenen süre $\frac{1}{\mu}$

W sistemde geçen beklenen süre $W = W_q + W_{servis} = \frac{1}{\mu - \lambda}$

T_q kuyrukta bekleme zamanı

$Pr\,(T_q \leq t) = 1 - \rho e^{-(\mu - \lambda)t}$

T sistemde geçirilen süre

$Pr\,(T \leq t) = 1 - e^{-(\mu - \lambda)t}$

Örnek 2.3. Bir bankanın Otomatik Para Transfer Makinesine sadece para çekmek için 5 dakikada ortalama 2 müşteri gelmektedir. Banka yönetimi sistemde 5 müşteriden daha az olması olasılığının en az 0.92224 olmasını istemektedir.

(a) Makinenin saatte en az kaç müşteriye hizmet vermesi gerekir?

(b) Bir müşterinin kuyrukta bekleme süresinin 1 dakikadan fazla olması olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: Öncelikle sisteme geliş hızını saatlik olarak hesaplayalım: 5 dakikada ortalama 2 müşteri geliyorsa, 60 dakikada ortalama 24 müşteri gelir. Dolayısı ile $\lambda = 24$ alınmalıdır. Ancak servis hızı μ bilinmemektedir. Buna göre,

(a) $P_{n<5} = 1 - P_{n\geq 5} = 1 - \rho^5 \geq 0.92224 \implies \rho = (1 - 0.92224)^{\frac{1}{5}} \implies \rho = 0.60$ olarak bulunur. Buradan, servis hızı $\mu = \dfrac{\lambda}{\rho} = \dfrac{24}{0.60} = 40$ şeklinde hesaplanır.

(b) $Pr\left(T_q > \underbrace{\dfrac{1}{60}}_{saat}\right) = 0.60e^{-\frac{(40-24)}{60}} \approx 0.46$ olarak elde edilir.

Örnek 2.4. Bir vestiyer imalathanesinde dolap kapakları montajı ünitesinde 1 kişi çalışmaktadır. Bu kişi bir saatlik zaman dilimi içerisinde ortalama 12 vestiyerin kapaklarını monte edebilmektedir. Saatte 10 vestiyer, üretim bandından kapak montajı için gönderilmektedir. Kaynağın sonsuz olduğu, vestiyerlerin kapak montajına gönderilmesi arasındaki sürelerin üstel dağılımlı olduğu, montaj sürelerinin de üstel dağılımlı olduğu kabul edilmektedir. Buna göre, şıklarda istenilenleri cevaplayınız.

(a) Herhangi bir saatlik zaman dilimi içinde montaj kuyruğunda olması beklenen vestiyer sayısını,

(b) Dakika cinsinden ortalama olarak kuyrukta geçen süreyi,

(c) En az 4 vestiyerin kapak montajı için kuyrukta bekletilmesi olasılığını,

(d) Bir vestiyerin kapak montajı için 15 dakikadan fazla bekletilmesi olasılığını,

(e) Kapak montajında çalışan işçinin herhangi bir saatlik zaman dilimi içerisinde toplamda boş kaldığı ortalama süreyi,

hesaplayınız.

Çözüm: Öncelikle verilen bilgilere göre, belirleyebildiğimiz karakteristikleri yazalım; $\mu = 12$ ve $\lambda = 10$ olup, trafik yoğunluğu, $\rho = \dfrac{5}{6}$ olarak belirlenir. Buna göre,

(a) $L_q = \dfrac{(5/6)^2}{1 - 5/6} = 4 + \dfrac{1}{6} \approx 4$ olarak bulunur.

(b) $W_q = \left(\dfrac{(25/6}{10}\right) 60 = 25$ dakikadır.

(c) $P_{n \geq 5} = \left(\dfrac{5}{6}\right)^5 = 0.4019$ olarak bulunur.

(d) $Pr\left(T_q > \dfrac{15}{60}\right) = \dfrac{5}{6} e^{-\frac{(12-10)15}{60}} = 0.5054$ olarak elde edilir.

(e) $P_0 = 1 - (5/6) = 1/6$ çalışanın bir saatlik zaman dilimi içerisinde boş kalması olasılığı olup, herhangi bir saatlik süre zarfı içinde, ortalama $60/6 = 10$ dakika boş kalması beklenir.

Örnek 2.5. Bir bankanın müşteri hizmetlerinde tek kişi hizmet vermektedir. Müşteriler ortalama 10 dakikada bir arama yapmaktadır buna karşın ortalama servis süresi ise 6 dakika sürmektedir. Buna göre,

(a) Müşteri hizmetlerinin boş kalması olasılığını hesaplayınız.

(b) Kuyrukta aramayı bekleyen ortalama müşteri sayısını bulunuz. (saatte)

(c) Kuyrukta geçen ortalama süreyi hesaplayınız. (dakika)

(d) En az bir müşterinin beklemesi olasılığını hesaplayınız.

(e) Bir müşterinin kuyrukta bekleme süresinin 3 dakikadan fazla olması olasılığını hesaplayınız.

(f) Aşağıda 10 aramaya ait aramalar arası süre ve operatörün verdiği hizmetin süreleri verilmiştir. Buna göre, 10 arama için kuyrukta bekleme sürelerini hesaplayınız.

Müşterilerin aramaları arasındaki süre	18	2	12	6	18	5	13	4	4	3
Hizmet süreleri	5	15	9	1	11	1	4	2	15	5

Çözüm: Sistem M/M/1 sonsuz kuyruklu sistemdir. Geliş hızı, $\lambda = 6$ (saatte 6 müşteri aramaktadır), servis hızı ise saatte $\mu = 10$' dur. Buradan trafik yoğunluğu $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{10} = 0.6$ olduğu görülür.

(a) $P_0 = 1 - \rho = 1 - .6 = 0.4$

(b) $L_q = \rho\frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 0.6\frac{6}{10-6} = 0.9 \approx 1$

(c) $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.9}{6} = 0.15(\times 60) = 9$ dakika

(d) $P_{n>1} = 1 - P_0 - P_1 = 1 - P_0(1+\rho) = 1 - 0.4(1+0.6) = 0.36$

(e) $\Pr\left(T_q > \frac{3}{60}\right) = \rho e^{-(\mu-\lambda)t} = 0.6e^{-(10-6)\frac{3}{60}} = 0.6e^{\frac{-1}{5}} = 0.4912.$

(f)

Arama zamanları (birikimli)	18	20	32	38	56	61	74	78	82	85
Arama Zamanları+Hizmet süreleri	23	38	47	48	67	68	78	80	97	102

Tabloyu okumaya çalıştığımızda, birinci müşteri 18. dakikada geliyor, 5 dakika hizmet süresi sonunda 23. dakikada sistemden ayrılıyor. Bu sırada, ikinci müşteri 20. dakikada sisteme dahil oluyor. Yani 3 dakika birinci müşteriyi bekliyor. 15 dakika hizmet süresi eklendiğinde 38. dakikada sistemden ayrılıyor. 3. müşteri 32. dakikada geldiği için 6 dakika bekledikten sonra hizmet alıyor. Bu şekilde devam ettirilirse, bekleme süreleri

Bekleme süreleri	0	3	6	9	0	6	0	0	0	12

şeklinde elde edilir.

Örnek 2.6. Bir bankanın gişesine fatura yatırmak için 5 dakikada ortalama 2 müşteri gelmektedir. Banka yönetimi sistemde 4 müşteriden daha az olması olasılığının en az 0.9222 olmasını istemektedir. Buna göre,

(a) Gişe memurunun saatte en az kaç müşteriye hizmet vermesi gerekir?

(b) Bir müşterinin kuyrukta bekleme süresinin 1 dakikadan fazla olması olasılığını hesaplayınız (en az hizmet vermesi gereken ortalama müşteri sayısını dikkate alınız).

Çözüm: Sistem $M/M/1$ sonsuz kuyruklu sistemdir. Geliş hızı, $\lambda = 24$ (saatte 24 müşteri gelmektedir).

(a) $P_{n\leq 4} = 1 - P_{n>5} = 1 - \rho^5 \geq 0.922 \implies \rho \leq 0.6 \implies \mu \geq 40$

(b) $\Pr\left(T_q > \dfrac{1}{60}\right) = \rho e^{-(\mu-\lambda)t} = 0.6e^{-(40-24)\frac{1}{60}} = 0.6e^{\frac{-4}{15}} = 0.4596.$

Örnek 2.7. Günün 10 saati açık olan bir motor yağı değişim istasyonunda tek kişi çalışmaktadır. Bu istasyona müşteriler ortalama 10 dakikada bir gelmekte olup, ortalama hizmet süresi ise 8 dakikadır. Araç başı ücret 40 lira olup, ortalama gider ise saatte

40 liradır. İstasyon sahibi 50000 lira tutarında yeni ekipmanlar aldığında kar-zarar bakımından nelerin değişeceğini merak etmektedir. Öyle ki, bu yeni ekipman sayesinde ortalama servis süresi 4 dakikaya inecek olup, ortalama 8 dakikada bir müşteri geleceğini öngörmektedir. Eski ekipmanların boş kalma maliyeti saatlik olarak 10 lira, yeni ekipmanların ise 20 lira olduğu düşünülmektedir. Geliştirme öncesi ve sonrası durumlarını karşılaştırınız. İşletmeci almayı planladığı ekipmanların maliyetini ortalama kaç günde çıkarır.

Çözüm: Sistem tek kanallı, sonsuz kapasiteli, gelişler arası süre ve hizmet süreleri üstel dağılımlı olup, $M/M/1/\infty/\infty$ kuyruk modelidir. Şimdi, geliştirme öncesi ve sonrası olmak üzere aşağıdaki tabloyu oluşturalım:

	Öncesi	Sonrası
λ	6	7.5
μ	7.5	15
ρ	0.8	0.5
Günlük Ortalama Gelir	$40 \times 6 \times 10 = 2400$	$40 \times 7.5 \times 10 = 3000$
Günlük Ortalama Gider	$40 \times 10 = 400$	$40 \times 10 = 400$
Günlük Ortalama Boş Kalma Maliyeti	$P_{0_{önce}} \times 10 \times 10 = 20$	$P_{0_{sonra}} \times 20 \times 10 = 100$
Günlük Ortalama Kar	1980	2500

Ekipman alındığında, günlük ortalama kar 2500 lira olup, bu sayede günlük ortalama kazanç $2500 - 1980 = 520$ lira olarak hesaplanır. Bu durumda, ortalama $50000/520 \approxeq 96$ günde maliyeti çıkarabilir.