Kuyruk Teorisi Ders Notları:

Bazı Kuyruk Modelleri

Mehmet YILMAZ

mehmetyilmaz@ankara.edu.tr

10 KASIM 2017

14. HAFTA

8 Tek kanallı, Sonsuz Kapasiteli, Servis Süreleri Keyfi Dağılımlı Kuyruk Sistemi M/G/1/∞

Bu kuyruk sisteminde gelişler arası sürenin $1/\lambda$ ortalamalı üstel dağıldığı, fakat servis sürelerinin ise "Genel" bir dağılıma yani $1/\mu$ ortalamalı σ^2 varyanslı herhangi bir dağılımdan geldiği varsayılmaktadır. Dolayısı ile homojen süreç olma koşulunu yerine getirir. Trafik yoğunluğu $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$ olmak üzere, M/M/1 sisteminde olduğu gibi, sistemin boş kalması olasılığı $P_0 = 1 - \rho$ olur. Sistem denge durumunda olduğundan, $L_{servis} = \rho$ olarak bulunur. Kuyrukta ortalama müşteri sayısını bulabilmek için aşağıdaki durumları göz önüne almalıyız:

- Herhangi bir birimin sistemden hizmet alıp ayrılmadan önce kuyrukta N birim olduğunu varsayalım,
- Bu birim sistemden ayrıldıktan sonra kuyrukta $N - 1$ birim, 1 birim de hizmet almak için servise gitmektedir,
- Bu birim de sistemden hizmet alıp ayrıldığında sistemde $N' = [(N-1) + R + D]$ birim mevcut olacaktır. Burada, R rastgele değişkeni servisteki birim hizmet aldığı esnada sisteme giriş yapan birim sayısını, D rastgele değişkeni ise $N = n$ gözlendiğinde, $n \geq 1$ ise 0, $n = 0$ ise 1 değerini almaktadır.

Buradan,

$$E[N'] = E[R] + E[N] - 1 + E[D]$$

eşitliği yazılabilir. Sistem dengede olduğundan, $E[N] = E[N']$ olacağından,

$$E[R] = 1 - E[D]$$

eşitliği elde edilir. Öte yandan,

$$E[D] = 0P_{n\geq 1} + 1P_0 = P_0 = 1 - \rho$$

olup,

$$E[R] = \rho$$

elde edilir. Şimdi N' rastgele değişkeninin 2. momentini hesaplayalım;

$$\begin{aligned} E[N'^2] =& E[(N - 1 + R + D)^2] \\ =& E[N^2] + E[R^2] + E[D^2] + 1 - 2E[N] + 2E[NR] + 2E[ND] - 2E[R] \\ & - 2E[D] + 2E[RD] \end{aligned}$$

Burada, $E[D^2] = E[D]$ olduğu ve sistem dengede olduğundan dolayı da $E[N'^2] = E[N]$ olduğu düşünülürse yukarıdaki eşitlik

$$0 = E[R^2] + E[D] + 1 - 2E[N] + 2E[NR] + 2E[ND] - 2\underbrace{[E[R] + E[D]]}_{=1} + 2E[RD]$$

şekline dönüşür. N ile R de istatistiki olarak bağımsızdır çünkü sistem sonsuz kapasiteli olduğundan, o an sisteme giriş yapanların sayısı sistemde bulunan birim saysına bağımlı değildir. Diğer yandan, R ile D rastgele değişkenleri de birbirinden bağımsızdır. Buna göre,

$$E[NR] = E[N]E[R] = E[N]\rho$$

ve

$$E[RD] = E[R]E[D] = \rho(1-\rho)$$

olup,

$$0 = E[R^2] - 2E[N](1-\rho) + 2E[ND] - \rho + 2\rho(1-\rho)$$

eşitliğine dönüşür. Diğer taraftan; D rastgele değişkeninin tanımından dolayı,

$$\begin{aligned} E[ND] =& \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n0 \Pr(N=n, D=0)}_{=0} + \sum_{n=0}^{\infty} n1 \Pr(N=n, D=1) \\ =& 0 \Pr(N=0, D=1) + \sum_{n=1}^{\infty} n \underbrace{\Pr(N=n, D=1)}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.Bu sonuç dikkate alındığında,

$$0 = E[R^2] - 2E[N](1-\rho) + \rho(1-2\rho)$$

sonucu elde edilir. R rastgele değişkeni servis zamanı $T_{servis} = t_{servis}$ olarak gözlendiğinde Poisson dağılımlı olup,

$$\begin{aligned} E[R^2] =& \int E[R^2 | T_{servis} = t_{servis}] f_{T_{servis}}(t_{servis}) dt_{servis} \\ =& \int \left[\lambda t_{servis} + \left(\lambda t_{servis}\right)^2\right] f_{T_{servis}}(t_{servis}) dt_{servis} \\ =& \lambda \underbrace{\int t_{servis} f_{T_{servis}}(t_{servis}) dt_{servis}}_{=\frac{1}{\mu}} + \lambda^2 \underbrace{\int t_{servis}^2 f_{T_{servis}}(t_{servis}) dt_{servis}}_{\sigma^2 + \frac{1}{\mu^2}} \\ =& \rho + \lambda^2\sigma^2 + \rho^2 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliği kullanarak sistemde olması beklenen birim sayısı yani $E[N]$

aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E[N] = L = \rho + \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$

Kuyrukta olması beklenen birim sayısı ise;

$$L_q = L - L_{servis} = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$

olarak bulunur. Sırası ile kurukta geçen ortalama süre,

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda\Big(\sigma^2 + \frac{1}{\mu^2}\Big)}{2(1-\rho)}$$

ve serviste geçen ortalama süre,

$$W_{servis} = \frac{L_{servis}}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

olup, sistemde geçen ortalama süre,

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda\Big(\sigma^2 + \frac{1}{\mu^2}\Big)}{2(1-\rho)}$$

olarak bulunur.

Örnek 8.1. Bir köprüden saatte 15 araç geçmektedir. Araçların köprüyü geçme süreleri 2 ile 4 dakika arasında düzgün dağılıma sahip olsun. Kuyrukta geçiş için bekleyen ortalama araç sayısını ve bir aracın kuyrukta geçirdiği süreyi hesaplayınız.

Çözüm: Servis süreleri için Düzgün dağılım belirtildiği için sistem $M/G/1$ sistemidir. Geliş hızı, $\lambda = 1/4$ (dakikada), servis hızı ise dakikada $\mu = 1/E[U] = 1/3$' tür. Buradan trafik yoğunluğu $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{3}{4}$ olduğu görülür. $\sigma^2 = Var(U) = \dfrac{(4-2)^2}{12} = \dfrac{1}{3}$ olarak bulunur. Buradan, 1 dakikalık süre içinde ortalama bekleyen araç sayısı

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{(1/4)^2(1/3)^2 + (3/4)^2}{2(1-3/4)} = \frac{41}{36}$$

olarak bulunur. Buradan kuryrukta geçen ortalama süre dakika cinsinden,

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{41}{9} \cong 5$$

olarak hesaplanır.

Örnek 8.2. Samet ve Yasin adında iki duvar ustası bir duvar örme işine başvuruyor. Duvarcıların her birisine saatte ortalama 6 el arabası tuğla getirilmektedir. Bir el arabası tuğlayı Samet 3.5 dakika ortalama, 1.5 dakika standart sapma ile Yasin ise 3.9 dakika ortalama, 1 dakika standart sapma ile işi tamamlamaktadır. Kimin kuyruğu az ise o işe alınacaktır. Sizce kim işe alınır? El arabasının duvar işçilerine gelişleri arasındaki süre zarfının üstel dağılımlı olduğu düşünülerek çözüme gidiniz.

Çözüm: El arabalarının dakikadaki geliş hızı $\lambda = 0.1$ dir. Öncelikle Samet için karakteristikleri belirleyelim:

- $\mu_{Samet} = 1/3.5 = 2/7$
- $\sigma^2_{Samet} = 1.5$
- $\rho_{Samet} = 0.35$
- $L_{q_{Samet}} = \dfrac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \dfrac{0.1^2(1.5)^2 + (0.35)^2}{2(1-0.35)} = 0.1115$

Şimdi aynı hesaplamaları Yasin için yapalım;

- $\mu_{Yasin} = 1/3.9$
- $\sigma^2_{Yasin} = 1$

- $\rho_{Yasin} = 0.39$

- $L_{q_{Yasin}} = \dfrac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \dfrac{0.1^2 + (0.39)^2}{2(1-0.39)} = 0.1329$

Dakikada ortalama bekleyen el arabası sayısı Samet usta için daha az olduğundan işe Samet usta alınır.

Örnek 8.3. Dağlık bir alandaki ormandan kesilen ağaçlar nehir yolu ile aşağıdaki kamyonlara yüklenmek üzere gönderilmektedir. Ağaçların aşağıya iniş süreleri arasındaki fark ortalama 10 dakika olan üstel dağılıma uymaktadır. Ağaçların budanıp yüklenmesi ise ortalama 8 dakika olup yüklenme işinin süre olarak standart sapması ise 1 dir. Kuyruk karakteristiklerini belirleyiniz.

Çözüm: Geliş hızı dakikada $\lambda = 0.1$ dir. Servis hızı ise $\mu = 1/8$ dir. Buradan trafik yoğunluğu $\rho = 0.8$ olarak bulunur.

- $\sigma^2 = 1$

- $P_0 = 1 - \rho = 0.2$

- $L_{Servis} = \rho = 0.8$

- $L_q = \dfrac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \dfrac{0.1^2 + (0.8)^2}{2(1-0.8)} = 1.625$

- $L = 2.425$

- $W_{Servis} = 8$ dakika

- $W_q = 16.25$ dakika

- $W = 24.25$ dakika

olarak hesaplanır.

9 Tek kanallı, İki Farklı Kitleli, Sonsuz Kapasiteli, Servis Süreleri Keyfi Dağılımlı Kuyruk Sistemi M/G/1/2/∞

Bu kuyruk sisteminde tek servis kanalı vardır ve gelişler iki farklı tür kitleden birimler ile gerçekleşir. Servis kapasitesinin sonsuz olduğu düşünülmektedir. Gelişler arası sürenin birinci kitle için $1/\lambda_1$, ikinci kilte için $1/\lambda_2$ ortalamalı üstel dağıldığı varsayılır. Aynı zamanda servis süreleri her iki kitle için de "Genel" bir dağılıma uyduğu düşünülür. Birinci kitleden gelen birimlerin hizmet süreleri $1/\mu_1$ ortalamalı ve σ_1^2 varyanslı, ikinci kitleden gelen birimlerin hizmet süreleri ise $1/\mu_2$ ortalamalı, σ_2^2 varyanslı herhangi bir dağılımdan geldiği varsayılmaktadır. Şimdi sistem karakteristiklerini tanıyalım:

- λ_j j. kitle için geliş hızı $j = 1, 2$
- σ_j^2 j. kitle için servis zamanının varyansı $j = 1, 2$
- μ_j j. kitle için geliş hızı $j = 1, 2$
- $1/\mu_j$ j. kitle için ortalama servis süresi $j = 1, 2$
- $\rho_j = \dfrac{\lambda_j}{\mu_j}$ j. kitle için trafik yoğunluğu $j = 1, 2$ $\rho_j < 1$
- n_j sistemde j. kitleden olanların sayısı $j = 1, 2$
- $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ geliş hızı
- $n = n_1 + n_2$ sistemdeki birim sayısı
- μ servis hızı
- ρ trafik yoğunluğu

Servis zamanı T_{servis} olmak üzere, serviste bulunan herhangi bir birim için servis zamanının beklenen değeri ve varyansını elde etmemiz gerekir.

$$E\Big[T_{servis}\Big] = \frac{1}{\mu} = \Big(\frac{1}{\mu_1}\Big)\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda}\Big) + \Big(\frac{1}{\mu_2}\Big)\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda}\Big) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\lambda} \implies \mu = \frac{\lambda}{\rho_1 + \rho_2}$$

Şimdi de servis zamanının ikinci momentini hesaplayalım:

$$E\Big[T^2_{servis}\Big] = \Big(\sigma_1^2 + (\frac{1}{\mu_1})^2\Big)\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda}\Big) + \Big(\sigma_2^2 + (\frac{1}{\mu_2})^2\Big)\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda}\Big)$$

Buradan servis zamanının varyansı,

$$Var(T_{servis}) = \sigma^2 = \Big(\sigma_1^2 + \Big(\frac{1}{\mu_1}\Big)^2\Big)\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda}\Big) + \Big(\sigma_2^2 + \Big(\frac{1}{\mu_2}\Big)^2\Big)\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda}\Big) - \Big(\frac{\rho_1 + \rho_2}{\lambda}\Big)^2$$

Model karakteristikleri aşağıdaki gibi verilebilir.

Sistemin boşta kalması olasılığı;

$$P_0 = 1 - \rho$$

Serviste olması beklenen birim sayısı;

$$L_{servis} = \rho = \rho_1 + \rho_2 = L_{servis_1} + L_{servis_2}$$

Kuyrukta olması beklenen birim sayısı;

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$

Sistemde olması beklenen birim sayısı;

$$L = L_{servis} + L_q = \rho + \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$

Serviste geçen ortalama süre;

$$W_{servis} = \frac{L_{servis}}{\lambda} = \frac{1}{\mu} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\lambda}$$

Kuyrukta geçen ortalama süre;

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda\Big(\sigma^2 + \dfrac{1}{\mu^2}\Big)}{2(1-\rho)}$$

Sistemde geçen ortalama süre;

$$W = W_{servis} + W_q = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda\Big(\sigma^2 + \dfrac{1}{\mu^2}\Big)}{2(1-\rho)}$$

.

Örnek 9.1. Sonsuz kapasiteli, tek servis kanalı olan bir sisteme birimlerin gelişleri arasındaki süre homojen ve üstel dağılımlıdır. Bu gelişler servis süreleri bakımından homojen olmayan iki kitleden gerçekleşmektedir. Birinci kitle için gelişler arasındaki süre 30 dakika ortalamalı, ikinci kitle için 10 dakika ortalamalı üstel dağılıma uymaktadır. Diğer taraftan, birinci kitleden gelerek giriş yapan birimlere hizmet süreleri 10 dakika ortalamalı 2 $dakika^2$ varyanslı, ikinci kitle için 4 dakika ortalamalı ve 1 $dakika^2$ varyanslı herhangi bir dağılıma sahiptir. Modeli tanımlayarak karakteristiklerini elde ediniz.

Çözüm: Birinci kitle için geliş hızı dakikada $\lambda_1 = 1/30$, ikinci kitle için $\lambda_2 = 1/10$ dur. Servis hızları ise sırası ile $\mu_1 = 1/10$ ve $\mu_2 = 1/4$ olarak bulunur. Servis sürelerinin varyanları ise sırası ile $\sigma_1^2 = 2$ ve $\sigma_2^2 = 1$ olarak verilmişti.

- $\rho_1 = \dfrac{\lambda_1}{\mu_1} = \dfrac{(1/30)}{(1/10)} = \dfrac{1}{3}$ ve $\rho_2 = \dfrac{\lambda_2}{\mu_2} = \dfrac{(1/10)}{(1/4)} = \dfrac{2}{5}$,
- $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{2}{15}$,

- $\mu = \dfrac{\lambda}{\rho_1 + \rho_2} = \dfrac{(2/15)}{(1/3) + (2/5)} = \dfrac{2}{11}$ servis hızı,
- $\rho = \rho_1 + \rho_2 = (1/3) + (2/5) = \dfrac{11}{15}$ trafik yoğunluğu,
- $P_0 = 1 - \rho = 1 - \dfrac{11}{15} = \dfrac{4}{15}$ sistemin boşta kalması olasılığı,
- $L_{servis} = \rho = \dfrac{11}{15}$
- $\sigma^2 = \Big(\sigma_1^2 + \big(\dfrac{1}{\mu_1}\big)^2\Big)\big(\dfrac{\lambda_1}{\lambda}\big) + \Big(\sigma_2^2 + \big(\dfrac{1}{\mu_2}\big)^2\Big)\big(\dfrac{\lambda_2}{\lambda}\big) - \Big(\dfrac{\rho_1 + \rho_2}{\lambda}\Big)^2$
  $= \Big(2 + 10^2\Big)\big(\dfrac{1/30}{2/15}\big) + \Big(1 + 4^2\Big)\big(\dfrac{1/10}{2/15}\big) - \Big(\dfrac{11}{2}\Big)^2 = 8$
- $L_q = \dfrac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \dfrac{(2/15)^2(8) + (11/15)^2}{2(1 - (11/15))} = \dfrac{153}{120} = 1.275$
- $L = \dfrac{11}{15} + \dfrac{153}{120} = \dfrac{241}{120} = 2.0083$
- $W_{servis} = \dfrac{L_{servis}}{\lambda} = \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{11}{2} = 5.5$ dakika
- $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{153/120}{2/15} = \dfrac{153}{16} = 9.5625$ dakika
- $W = \dfrac{11}{2} + \dfrac{153}{16} = \dfrac{241}{16} = 15.0625$ dakika.

Kaynaklar

[1] Bhat, U. N. (2015)

An introduction to queueing theory: modeling and analysis in applications. Birkhäuser.

Academic Press

[2] Cooper, R. (1983)

Introduction to Queueing Theory

Elsevier Science Publishing

[3] Bolch, G., Greiner, S., de Meer, H., & Trivedi, K. S. (2006)

Queueing networks and Markov chains: modeling and performance evaluation with computer science applications.

John Wiley & Sons.

[4] Thomopoulos, N. T. (2012)

Fundamentals of Queuing Systems

Springer US.

[5] Saaty, T. L. (1961)

Elements of queueing theory with applications

New York: McGraw-Hill.

[6] Sarıaslan, H. (1986)

Sıra Bekleme Sistemlerinde Simulasyon (Benzetim) Tekniği

A.Ü.S.B.F. ve Basın Yayın Yüksekokulu Basımevi, Ankara