Bölüm 3

Gruplar

Bu bölümde ilk olarak bir küme üzerinde tanımlı işlem kavramını ele alıp işlemlerin bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Daha sonra kümeler ve üzerinde tanımlı işlemlerden oluşan cebirsel yapılarla ilgileneceğiz. "Grup" adı verilen cebirsel yapıları detaylı bir şekilde incelemeye başlayacağız.

3.1 İşlemler

Bu kısımda "işlem" adı verilen özel bir fonksiyon çeşidini ve işlemlerin önemli özelliklerini inceleyeceğiz.

Tanım 3.1.1 *$\emptyset \neq A$ bir küme olmak üzere $A \times A$ dan A ya tanımlı her fonksiyona A kümesi üzerinde bir* **(ikili) işlem** *denir.*

Örnek 3.1.2 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde bir "$*$" bağıntısını $x * y = x + y - 1$ olarak tanımlayalım. O zaman her $x,\ y \in \mathbb{Z}$ için $x * y \in \mathbb{Z}$ dir. Eğer $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ ise o zaman

$$x_1 * y_1 = x_1 + y_1 - 1 = x_2 + y_2 - 1 = x_2 * y_2$$

elde edilir, yani "$*$" iyi tanımlıdır. Bu nedenle "$*$" bağıntısı $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ den $\mathbb{Z}$ ye bir fonksiyon, yani $\mathbb{Z}$ üzerinde bir işlemdir. ▲

Örnek 3.1.3 T tek tamsayılar kümesi üzerinde $x * y = x + y$ şeklinde tanımlansın. O zaman $1,\ 3 \in T$ için $1 * 3 = 4 \notin T$ olduğundan "$*$", T kümesi üzerinde bir işlem değildir. ▲

Tanım 3.1.4 *$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi verilsin. Bu durumda*

$*$	a_1	a_2	$\ldots$	a_n
a_1	$a_1 * a_1$	$a_1 * a_2$	$\ldots$	$a_1 * a_n$
a_2	$a_2 * a_1$	$a_2 * a_2$	$\ldots$	$a_2 * a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_i	$a_i * a_1$	$a_i * a_2$	$\ldots$	$a_i * a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_n	$a_n * a_1$	$a_n * a_2$	$\ldots$	$a_n * a_n$

tablosuna A kümesinin $*$ işlemine göre **işlem tablosu** *veya* **Cayley tablosu** *denir.*

Örnek 3.1.5 $G = \{1, -1, i, -i\} \subset \mathbb{C}$ kümesinin kompleks sayıların bilinen çarpma işlemine göre işlem tablosu

$.$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

Tablo 3.1: $G = \{1, -1, i, -i\}$ nin İşlem Tablosu

şeklindedir. ▲

Şimdi işlemlerin bazı temel özelliklerini inceleyelim.

Tanım 3.1.6 *$\emptyset \neq A$ bir küme ve A üzerinde bir $*$ işlemi verilsin.*

(1) *$B \subseteq A$ olmak üzere eğer, her $x,\ y \in B$ için $x * y \in B$ ise o zaman "$*$" işlemi B kümesi üzerinde* **kapalılık özelliğine sahiptir***,*

(2) *her $x,\ y,\ z \in A$ için $x * (y * z) = (x * y) * z$ ise o zaman $*$ işlemi A kümesi üzerinde* **birleşme özelliğine sahiptir***,*

(3) *her $x,\ y \in A$ için $x * y = y * x$ ise o zaman $*$ işlemi A kümesi üzerinde* **değişme özelliğine sahiptir** *denir.*

Örnek 3.1.7 $\mathbb{Z}$ kümesinde iki tek tamsayının toplamı bir tek tamsayı olmadığından $T = \{2k + 1|\ k \in \mathbb{Z}\}$ tek tamsayılar kümesi tamsayıların bilinen toplama işlemine göre kapalı değildir. Ancak iki tek tamsayının çarpımı yine bir tek tamsayı olduğundan T tamsayıların bilinen çarpma işlemine göre kapalıdır. Diğer taraftan $2\mathbb{Z} = \{2k|\ k \in \mathbb{Z}\}$ çift tamsayılar kümesi tamsayıların bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır. ▲

Örnek 3.1.8 $\mathbb{Z}$ üzerinde $x * y = x + y - 1$ ile tanımlanan $*$ işlemi için

$$\begin{aligned} x*(y*z) &= x*(y+z-1) \\ &= x+y+z-1-1 \\ &= x+y-1+z-1 \\ &= (x*y)*z \end{aligned}$$

olduğundan $*$ işlemi $\mathbb{Z}$ üzerinde birleşme özelliğine sahiptir. Ayrıca $x*y = x+y-1 = y+x-1 = y*x$ olduğundan $*$ işlemi $\mathbb{Z}$ üzerinde değişme özelliğine sahiptir. ▲

Örnek 3.1.9 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde $x * y = x - y$ ile tanımlanan "$*$" işlemi verildiğinde $(5*3)*2 \neq 5*(3*2)$ olduğundan $*$ işlemi $\mathbb{Z}$ üzerinde birleşme özelliğine sahip değildir. Benzer şekilde $5*3 \neq 3*5$ olduğundan $*$ işlemi $\mathbb{Z}$ üzerinde değişme özelliğine sahip değildir. ▲

Şimdi bir kümenin üzerinde tanımlı bir işleme göre "birim elemanı" kavramını inceleyelim.

Tanım 3.1.10 *$\emptyset \neq A$ bir küme ve A üzerinde bir "$*$" işlemi verilmiş olsun. Eğer $e \in A$ olmak üzere, her $x \in A$ için*

$$e * x = x$$

ise o zaman e ye A nın $*$ işlemine göre bir **sol birim elemanı***; eğer $f \in A$ olmak üzere, her $x \in A$ için*

$$x * f = x$$

ise o zaman f ye A kümesinin $*$ işlemine göre bir **sağ birim elemanı** *denir.*
Eğer $e \in A$ olmak üzere, her $x \in A$ için

$$x * e = e * x = x$$

ise o zaman e ye A kümesinin $*$ işlemine göre bir **birim elemanı** *denir.*

Örnek 3.1.11 $\mathbb{Z}$ üzerinde

$$m \diamond n = |m| \cdot n$$

şeklinde tanımlanan "$\diamond$" işlemine göre iki sol birim eleman vardır. Çünkü her $n \in \mathbb{Z}$ için hem

$$1 \diamond n = |1| \cdot n = 1 \cdot n = n$$

hem de

$$(-1) \diamond n = |-1| \cdot n = 1 \cdot n = n$$

dir. Yani $(-1) \diamond n = 1 \diamond n = n$ dir.

Benzer şekilde $\mathbb{Z}$ üzerinde

$$m \bullet n = m \cdot |n|$$

şeklinde tanımlanan "$\bullet$" işlemine göre iki sağ birim eleman vardır. ▲

Örnek 3.1.12 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde

$$x \oplus y = x + y - 1$$

şeklinde tanımlanan "$\oplus$" işlemine göre birim eleman 1 dir. ▲

Örnek 3.1.13 $\emptyset \neq X$ bir küme ve $A,\ B \in \mathcal{P}(X)$ olsun. $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ şeklinde tanımlanan "$\triangle$" işlemine göre birim eleman $\emptyset$, $A \odot B \ = A \cap B$ şeklinde tanımlanan "$\odot$" işlemine göre birim eleman X dir. ▲

Teorem 3.1.14 *A bir küme olmak üzere; "$*$", A üzerinde tanımlı bir işlem olsun. Eğer A nın $*$ işlemine göre birim elemanı var ise tektir.*

Şimdi üzerinde tanımlı bir işleme göre birim elemana sahip olan kümelerde "bir elemanın tersi" kavramını tanımlayalım.

Tanım 3.1.15 *$\emptyset \neq A$ bir küme ve A üzerinde bir "$*$" işlemi verilsin. A kümesinin $*$ işlemine göre birim elemanı e olmak üzere, $a \in A$ için*

$$a * b = e$$

olacak şekilde bir $b \in A$ varsa o zaman b ye a nın $*$ işlemine göre bir **sağ tersi** *denir. Benzer şekilde, eğer*

$$b * a = e$$

olacak şekilde bir $b \in A$ varsa o zaman b ye a nın $*$ işlemine göre bir **sol tersi** *denir. Eğer*

$$a * b = b * a = e$$

olacak şekilde bir $b \in A$ varsa o zaman b ye a nın $*$ işlemine göre bir **tersi** *adı verilir.*

Örnek 3.1.16 $\mathbb{Z}$ üzerinde $x \oplus y = x + y - 1$ şeklinde tanımlanan $\oplus$ işlemine göre birim eleman 1 dir. Bir $x \in \mathbb{Z}$ nin "$\oplus$" işlemine göre bir tersi t ise o zaman $x \oplus t = x + t - 1 = 1$ olup $t = 2 - x \in \mathbb{Z}$ dir. ▲

Örnek 3.1.17 Kompleks sayıların bilinen çarpma işlemini $G = \{1, -1, i, -i\} \subset \mathbb{C}$ kümesi üzerinde ele alalım. G nin bu çarpma işlemine göre birim elemanı 1 olup -1 in tersi -1, i nin tersi $-i$ ve $-i$ nin tersi i dir. ▲

3.2 Gruplar

Bu kısımda üzerinde bir işlem tanımlı kümeleri ve bu işlemlerin sağladığı bazı özellikleri ele alacağız. Bir küme ve üzerinde tanımlı işlemi tarafından oluşan cebirsel yapılardan "grup" adı verilenleri detaylı bir şekilde inceleyeceğiz.

Tanım 3.2.1 *$\emptyset \neq C$ bir küme olmak üzere $\star_1, \star_2, \ldots, \star_n$; C üzerinde tanımlı işlemler olsun.*

$$(C, \star_1, \star_2, \ldots, \star_n)$$

$(n+1)$-lisine bir **cebirsel sistem** *adı verilir.*

Örnek 3.2.2 Matrislerin bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ üçlüsü bir cebirsel sistemdir. ▲

Şimdi "grup" adı verilen ve cebirsel sistemlerin önemli bir örneğini teşkil eden yapıları incelemeye başlayalım.

Tanım 3.2.3 *$\emptyset \neq G$ kümesi üzerinde bir işlem $*$ olsun. Eğer*

(1) *$*$ işlemi G kümesi üzerinde birleşme özelliğine sahip ise,*

(2) *G kümesi $*$ işlemine göre birim elemana sahip ise,*

(3) *G kümesindeki her elemanın $*$ işlemine göre G içinde tersi var ise*

o zaman $(G, *)$ ikilisine bir **grup** *adı verilir.*

Tanım 3.2.4 *$(G, *)$ bir grup olmak üzere eğer her x, $y \in G$ için $x * y = y * x$ ise o zaman G ye bir* **değişmeli** *veya* **abelyen grup** *denir.*

Uyarı 3.2.5 $(G, *)$ ikilisi bir grup olarak tanımlanmış olsa da, pratikte işlem belirtilmeden (akılda tutularak) G kümesine bir grup denir. ♦

Örnek 3.2.6 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi bilinen toplama işlemine göre değişmeli bir gruptur. ▲

Örnek 3.2.7 $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ kümesini göz önüne alalım.

$$i.i = j.j = k.k = -1, \ i.j = k = (-j).i, \ j.k = i = (-k).j, \ ki = j = (-i).k$$

şeklinde tanımlanan işleme göre Q_8 in işlem tablosu incelendiğinde Q_8 in bu işleme göre birim elemanının 1 olduğu görülür. Ayrıca her elemanın tersi var olup Q_8 kümesi verilen çarpma işlemine göre bir gruptur. Bu gruba **kuaterniyonlar grubu** adı verilir. Diğer taraftan $i.j = k$, fakat $j.i = -k$ olduğundan bu grup değişmeli değildir. ▲

Örnek 3.2.8 $\mathbb{Z}$ kümesini bilinen çarpma işlemi ile göz önüne alalım. $\mathbb{Z}$ nin çarpma işlemine göre tersi mevcut olan elemanları sadece ± 1 olduğundan $\mathbb{Z}$ kümesi bilinen çarpma işlemiyle bir grup değildir. ▲

Örnek 3.2.9

(1) $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere
$$n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$$
kümesi tamsayıların toplama işlemine göre değişmeli bir gruptur.

(2) $\mathbb{Q}$ bilinen toplama işlemiyle değişmeli bir gruptur.

(3) $\mathbb{C}$ bilinen toplama işlemine göre değişmeli bir gruptur.

(4) $\mathbb{Q}^*$ kümesi bilinen çarpma işlemine göre değişmeli bir gruptur.

(5) $\mathbb{R}^+$ bilinen çarpma işlemine göre değişmeli bir grup olmasına rağmen toplama işlemine göre bir grup değildir. ▲

Teorem 3.2.10 *G bir grup olsun.*

(1) *G nin birim elemanı tektir. Birim eleman genellikle çarpımsal gruplarda e veya 1 ile toplamsal gruplarda ise 0 ile gösterilir.*

(2) *Eğer $c \in G$ için $cc = c$ ise o zaman $c = e$ dir.*

(3) *Her $x \in G$ için x in tersi tektir. Genellikle x in tersi çarpımsal gruplarda x^{-1} ile toplamsal gruplarda ise $-x$ ile gösterilir.*

(4) *Her $x \in G$ için $(x^{-1})^{-1} = x$ dir (toplamsal gruplar için $-(-x) = x$ tir).*

(5) *Her $x,\ y \in G$ için $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ dir (toplamsal gruplar için $-(x+y) = (-y)+(-x)$ tir).*

(6) *$a,\ x,\ y \in G$ olmak üzere eğer $ax = ay$ ise o zaman $x = y$ dir (toplamsal gruplar için $a + x = a + y$ ise o zaman $x{=}y$ dir). Bu özelliğe* **soldan sadeleşme özelliği** *denir.*

Benzer şekilde $a,\ x,\ y \in G$ olmak üzere eğer $xa = ya$ ise o zaman $x = y$ dir (toplamsal gruplar için $x + a = y + a$ ise o zaman $x{=}y$ dir). Bu özelliğe **sağdan sadeleşme özelliği** *denir.*

Örnek 3.2.11 $M_2(\mathbb{R})$ matrislerin toplama işlemine göre bir değişmeli gruptur. Grubun birim elemanı $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinin toplamaya göre tersi $\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$ dir. Fakat $M_2(\mathbb{R})$, matris çarpımına göre bir grup değildir. Çünkü $M_2(\mathbb{R})$ kümesi $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$ gibi çarpma işlemine göre tersi olmayan elemanlar içerir. ▲

Örnek 3.2.12 $n > 1$ bir tamsayı olmak üzere,

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

kümesi bilinen toplama işlemine göre bir grup, fakat çarpma işlemine göre bir grup değildir. Eğer

$$U(n) = \{\overline{s} |\ \overline{s} \in \mathbb{Z}_n \text{ ve } (s, n) = 1\}$$

ise zaman $U(n)$ çarpmaya göre değişmeli bir gruptur. ▲

Grupları "sonlu" ve "sonsuz" gruplar olmak üzere iki sınıfa ayıracağız.

Tanım 3.2.13 *Eğer bir G grubu sonlu sayıda elemana sahip ise (yani kardinalitesi sonlu ise) o zaman G ye bir* **sonlu grup***, aksi halde* **sonsuz grup** *adı verilir. G nin kardinalitesine G nin* **mertebesi** *denir ve $o(G)$ veya $|G|$ ile gösterilir.*

Örnek 3.2.14 $\mathbb{Z}_n$ grubunun mertebesi n, yani $|\mathbb{Z}_n| = n$ dir. Diğer yandan $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ grupları sonsuz grup örnekleridir ve $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ dır. Ayrıca $(\mathbb{R}, +)$ da sonsuz bir gruptur ve $|\mathbb{R}| = c$ dir. ▲

Örnek 3.2.15 F; $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ya da $\mathbb{Z}_p$ (p bir asal sayı) olmak üzere, $M_2(F)$ matrislerin toplama işlemine göre bir grup, fakat çarpma işlemine göre bir grup değildir. Bu durumda $A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(F)$ matrisinin *determinantı* $\det A = ad - bc$ dır.

$$GL(2, F) = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} |\ a,\ b,\ c,\ d \in F \text{ ve } ad - bc \neq 0\}$$

dır. O zaman $GL(2, F)$ matrislerin çarpma işlemine göre değişmeli olmayan bir gruptur. Eğer $A,\ B \in GL(2, F)$ ise o zaman $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ olduğundan $AB \in GL(2, F)$ dir. Böylece matris çarpımı $GL(2, F)$ üzerinde de bir işlemdir. Çarpma işleminin birleşme özelliğine sahip olduğu gösterilebilir. Birim eleman $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$ matrisinin tersi

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & \dfrac{-b}{ad - bc} \\ \dfrac{-c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

dir (Eğer $F = \mathbb{Z}_p$ ise o zaman elamanların üzerinde çizgiler çekilir). GL$(2, F)$ grubuna F üzerindeki **genel lineer grup** denir.

Eğer

$$SL(2, F) = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} |\ a,\ b,\ c,\ d \in F \text{ ve } ad - bc = 1\}$$

olarak tanımlanırsa o zaman $SL(2, F)$ matrislerin çarpma işlemine göre değişmeli olmayan bir gruptur. $SL(2, F)$ grubuna F üzerindeki **özel lineer grup** denir. ▲

Teorem 3.2.16 *$\emptyset \neq G$ bir küme olsun. Eğer G kümesi üzerinde birleşme özelliğine sahip bir $*$ işlemi verilmiş ise o zaman aşağıdaki önermeler birbirine denktir.*
(i) *$(G, *)$ bir gruptur.*
(ii) *Her $a,\ b \in G$ için $a * x = b$ ve $y * a = b$ denklemlerinin G içinde $x,\ y$ tek çözümleri vardır.*

Tanım 3.2.17 *G bir grup, $n \geq 2$ bir tamsayı olsun. $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ olmak üzere her $1 \leq k \leq n-1$ için*

$$a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1} = (a_1 a_2 \ldots a_k) a_{k+1}$$

şeklinde ardışık olarak tanımlıdır.

Teorem 3.2.18 (Genelleştirilmiş Birleşme özelliği) *G bir grup, $n \geq 2$ tamsayısı için $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ olsun. $1 \leq m < n$ şartını sağlayan her $m \in \mathbb{Z}^+$ için*

$$(a_1 a_2 \ldots a_m)(a_{m+1} \ldots a_n) = a_1 a_2 \ldots a_n$$

dir.

$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ gruplar olmak üzere

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) |\ 1 \leq i \leq n \text{ için } a_i \in A_i\}$$

kümesini göz önüne alalım. $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ kümesi üzerinde "$\cdot$" işlemi her $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ için

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n)$$

şeklinde tanımlanırsa o zaman $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, "$\cdot$" işlemine göre bir gruptur. Birim eleman $(e_{A_1}, e_{A_2}, \ldots, e_{A_n})$ ve $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ elemanının "$\cdot$" işlemine göre tersi $(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1})$ dir. Burada en önemli noktalardan biri, her $1 \leq i \leq n$ için $a_i b_i$ de A_i nın işleminin gözönüne alınmasıdır (toplama, çarpma vb) $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ grubuna $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ gruplarının **(dış) direkt çarpımı (toplamı)** denir. Eğer $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ grupları toplamsal ise o zaman bazen $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ yerine $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$ gösterimi kullanılabilir.

Örnek 3.2.19 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1})\}$ (dış) direkt toplamının birim elemanı $(\overline{0}, \overline{0})$ dır. $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ nın tersi $(-\overline{x}, -\overline{y})$ dir. Örneğin $(\overline{1}, \overline{1})$ elemanının tersi $(-\overline{1}, -\overline{1}) = (\overline{1}, \overline{1})$ dir. $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ grubuna **Klein 4-grubu** denir. ▲

Örnek 3.2.20 $U(8) \times U(10) = \{([1]_8, [1]_{10}), ([1]_8, [3]_{10}), ([1]_8, [7]_{10}), ([1]_8, [9]_{10}), ([3]_8, [1]_{10}), ([3]_8, [3]_{10})), ([3]_8, [7]_{10}), ([3]_8, [9]_{10}), ([5]_8, [1]_{10}), ([5]_8, [3]_{10}), ([5]_8, [7]_{10}), ([5]_8, [9]_{10}), ([7]_8, [1]_{10}), ([7]_8, [3]_{10}), ([7]_8, [7]_{10}), ([7]_8, [9]_{10})\}$ (dış) direkt çarpımının birim elemanı $([1]_8, [1]_{10})$ dır. $(x, y) \in U(8) \times U(10)$ nın tersi (x^{-1}, y^{-1}) dir. Örneğin $([5]_8, [1]_{10})$ in tersi $([5]_8^{-1}, [1]_{10}^{-1}) = ([5]_8, [1]_{10})$ dir. ▲

Şimdi gruplarda elemanların kuvvetlerinin (toplamsal gruplarda "tamsayı katlarının") nasıl hesaplanacağını görelim.

Tanım 3.2.21 *G bir grup ve $a \in G$ olsun. $a^0 = e$, $a^1 = a$ ve her $k \in \mathbb{Z}^+$ için $a^{k+1} = a^k a$, $a^{-k} = (a^{-1})^k$ şeklinde tanımlanır. Toplamsal gruplarda ise $0a = 0$, $1a = a$ ve her $k \in \mathbb{Z}^+$ için $(k+1)a = ka + a$, $(-k)a = k(-a)$ şeklindedir.*

Örnek 3.2.22 $G = \mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ değişmeli grubunu göz önüne alalım. $3 \cdot \overline{2} = \overline{2} + \overline{2} + \overline{2} = \overline{0}$ dir. Ayrıca $(-2) \cdot \overline{2} = (-\overline{2}) + (-\overline{2}) = \overline{2}$ dir. Benzer şekilde $G = \{1, -1, i, -i\}$ çarpımsal grubunda $i^2 = i \cdot i = -1$ ve $i^{-3} = i^{-1} \cdot i^{-1} \cdot i^{-1} = i$ dir. ▲

Teorem 3.2.23 *G bir grup ve $a,\ b \in G$ olsun. O zaman her $m,\ n \in \mathbb{Z}^+$ için*

(i) *$a^m a^n = a^{m+n}$ (toplamsal gruplarda $ma + na = (m+n)a$) dir,*

(ii) *$(a^m)^n = a^{mn}$ (toplamsal gruplarda $m(na) = (mn)a$) dir.*

(iii) *Eğer G bir değişmeli grup ise o zaman $(ab)^n = a^n b^n$ (toplamsal gruplarda $n(a+b) = na + nb$) dir.*