Bölüm 6

Bir Altküme Tarafından Üretilen Gruplar ve Devirli Gruplar

Bu bölümde verilen bir grubun boş kümeden farklı altkümeleri tarafından elde edilen grupları inceleyeceğiz. Bu altkümelerden özellikle tek elemanlı olanları tarafından üretilen altgruplar gruplar teorisinde önemli bir yere sahiptir.

6.1 Bir Altküme Tarafından Üretilen Gruplar

Bu bölümde herhangi bir grubun boş kümeden farklı altkümeleri yardımıyla ortaya çıkan grupları ele alacağız.

Tanım 6.1.1 *G bir grup ve $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. Bu durumda*

$$\langle A\rangle = \{a_1 a_2 \ldots a_n : \text{ her } 1 \leq i \leq n \text{ için } a_i \in A \text{ veya } a_i^{-1} \in A\}$$

kümesine A **tarafından üretilen küme** *adı verilir. Özel olarak $\langle\emptyset\rangle = \{e_G\}$ dir.*

Teorem 6.1.2 *G bir grup, $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. Bu durumda $\langle A\rangle \leq G$ dir. Bu altgruba A* **tarafından üretilen altgrup** *adı verilir.*

Uyarı 6.1.3 Eğer $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ve $G = \langle A\rangle$ ise o zaman $G = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ şeklinde gösterilir. ♦

Tanım 6.1.4 *G bir grup ve $a_1, \ldots, a_n \in G$ olsun. Eğer $G = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ ise o zaman $a_1, \ldots, a_n$ elemanlarına G nin* **üreteçleri** *denir.*

Tanım 6.1.1 de verilen $\langle A\rangle$ aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

G bir grup ve $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. Bu durumda

$$\langle A \rangle = \{a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \ldots a_n^{\varepsilon_n} : \text{ her } 1 \leq i \leq n \text{ için } a_i \in A \text{ ve } \varepsilon_i = \mp 1\}$$

dır. Toplamsal gruplarda

$$\langle A \rangle = \{\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n : \text{ her } 1 \leq i \leq n \text{ için } a_i \in A \text{ ve } \varepsilon_i = \mp 1\}$$

şeklindedir.

Örnek 6.1.5 S_3 simetrik grubunda

$$\begin{aligned}
(1) &= (1,2)(1,2) \\
(1,2) &= (1,2) \\
(1,3) &= (1,3) \\
(2,3) &= (1,2)(1,3)(1,2) \\
(1,2,3) &= (1,3)(1,2) \\
(1,3,2) &= (1,2)(1,3)
\end{aligned}$$

olduğundan $S_3 = \langle (1,2), (1,3) \rangle$ dir. ▲

Örnek 6.1.6 $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ kuaterniyonlar grubunun üreteçlerini bulalım. $Q_8 = \langle 1, -1, i, -i, j, -j, k, -k \rangle$ dir. Biz $Q_8 = \langle i, j \rangle$ olduğunu gösterelim. $k = ij$ olduğundan k silinecek, $-k = ji$ olduğundan $-k$ silinecek, $-1 = i.i$ olduğundan -1 silinecek, $1 = (-i)i$ olduğundan 1 silinecektir. Böylece $A = \{i, j, -i, -j\}$ bir üreteç kümesi ve $i^{-1} = -i$ ve $j^{-1} = -j$ olduğundan $\langle A \rangle = \langle i, j, -i, -j \rangle = \langle i, j \rangle$ dir. Benzer şekilde $Q_8 = \langle i, k \rangle$ ve $Q_8 = \langle j, k \rangle$ olduğu da gösterilebilir. ▲

Uyarı 6.1.7 G bir grup ve $A \subseteq G$ olsun. Bu durumda

$$\langle A \rangle = \bigcap_{\substack{K \leq G \\ A \subseteq K}} K$$

dir. ♦

Uyarı 6.1.8 G bir değişmeli grup, $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \in G$ ve $G = \langle a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \rangle$ olsun. O zaman

$$G = \{a_1^{r_1} \ldots a_n^{r_n} |\text{ her } 1 \leq i \leq n \text{ için } r_i \in \mathbb{Z}\},$$

toplamsal gruplarda

$$G = \{r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n |\text{ her } 1 \leq i \leq n \text{ için } r_i \in \mathbb{Z}\}$$

şeklindedir. Örneğin $\mathbb{Z} = \langle 4, 5 \rangle = \{u4 + v5|\ u,\ v \in \mathbb{Z}\}$ dir. ♦

6.2 Devirli Gruplar

Bu kısımda bir grubun bir elemanı tarafından üretilen altgruplarını ele alacağız. Ayrıca bir grupta bir elemanın mertebesi kavramını da inceleyeceğiz.

Teorem 6.2.1 *G bir grup ve $a \in G$ olsun. Eğer*

$$H = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

ise o zaman H kümesi G nin bir altgrubudur.

Tanım 6.2.2 *G bir grup ve $a \in G$ olsun. G nin $H := \{a^n : \ n \in \mathbb{Z}\}$ altgrubuna G nin a **tarafından üretilen devirli altgrubu** denir ve $\langle a \rangle$ şeklinde gösterilir. Özel olarak $G = \langle a \rangle$ olacak şekilde $a \in G$ varsa o zaman G ye a **tarafından üretilen devirli grup** denir. Eğer G bir toplamsal grup ise o zaman $\langle a \rangle = \{na| \ n \in \mathbb{Z}\}$ şeklindedir.*

Örnek 6.2.3 $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$ olduğundan $(\mathbb{Z}, +)$ grubu devirli bir gruptur. ▲

Örnek 6.2.4 Her $n \geq 2$ için $n\mathbb{Z} = \langle n \rangle = \langle -n \rangle$ kümeleri $\mathbb{Z}$ nin devirli altgruplarıdır. ▲

Uyarı 6.2.5 G bir grup $a \in G$ olsun. O zaman $\langle a \rangle = \bigcap_{\substack{K \leq G \\ a \in K}} K$ dir. ♦

Örnek 6.2.6 $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \ a \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesi matrislerin bilinen çarpma işlemine göre bir gruptur. Ayrıca $H = \langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rangle$ olup H devirlidir. ▲

Tanım 6.2.7 *G bir grup ve $a \in G$ olsun. Eğer $G = \langle a \rangle$ ise o zaman a ya G nin bir **üreteci** denir.*

Teorem 6.2.8 *Eğer bir G grubunun bir üreteci a ise o zaman G nin diğer bir üreteci a^{-1} dir.*

Örnek 6.2.9 $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ toplamsal grubunu göz önüne alalım. $\mathbb{Z}_n = \langle \overline{1} \rangle$, olup $\mathbb{Z}_n$ devirli bir gruptur. O halde $\overline{1}$, $\mathbb{Z}_n$ grubunun bir üretecidir. ▲

Örnek 6.2.10 $\mathbb{Z}_{10}$ içerisinde $H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}\} = \langle \overline{2} \rangle$ olduğundan Teorem 6.2.8 gereğince $H = \langle -\overline{2} \rangle = \langle \overline{8} \rangle$ dir. ▲

Teorem 6.2.11 *G bir grup ve $a \in G$ olsun. Eğer her $k \in \mathbb{Z}^+$ için $a^k \neq e$ ise o zaman $\langle a \rangle$ bir sonsuz gruptur.*

Sonuç 6.2.12 *G bir grup ve $a \in G$ olsun. Eğer G sonlu ise o zaman $a^n = e$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.*

Teorem 6.2.13 *G bir grup, $a \in G$ ve $a^n = e$ şartını sağlayan en küçük pozitif tamsayı m olsun. Bu durumda*

(i) *$\langle a \rangle = \{a^0, a^1, \ldots, a^{m-1}\}$ şeklindedir.*

(ii) *$a^s = a^t$ olması için gerek ve yeter şart $t \equiv s \pmod{m}$ olmasıdır.*

Sonuç 6.2.14 *Eğer $G = \langle a \rangle$ sonsuz ise o zaman her $n \in \mathbb{Z}$ için $a^n \neq e$ dir. Özel olarak $r,\ s \in \mathbb{Z}^+$ için $a^r = a^s$ ise o zaman $r = s$ dir.*

Şimdi gruplarda bir elemanın mertebesi kavramını tanımlayalım.

Tanım 6.2.15 *G bir grup ve $a \in G$ olsun. Eğer $\langle a \rangle$ sonlu bir grup ise o zaman $\langle a \rangle$ altgrubunun eleman sayısına (mertebesine)* **a nın mertebesi** *denir ve $o(a)$ veya $|a|$ ile gösterilir. Eğer $\langle a \rangle$ sonsuz bir grup ise o zaman a* **nın mertebesi sonsuzdur** *denir.*

Örnek 6.2.16 $U(10) = \{\overline{3}, \overline{9}, \overline{7}, \overline{1}\}$ grubunu göz önüne alalım. $\overline{3}^1 = \overline{3}$, $\overline{3}^2 = \overline{9}$, $\overline{3}^3 = \overline{7}$, $\overline{3}^4 = \overline{1}$ olduğundan $o(\overline{3}) = 4$ tür. Bu sebeple $\langle \overline{3} \rangle = U(10)$ dur. Yani $U(10)$ bir devirli gruptur ve bir üreteci $\overline{3}$ dir.

$U(8) = \{\overline{7}, \overline{5}, \overline{3}, \overline{1}\}$ grubunu göz önüne alalım.

(1) $\langle \overline{1} \rangle = \{\overline{1}\}$ den $o(\overline{1}) = 1$ olup $\langle \overline{1} \rangle \neq U(8)$ dir.

(2) $\overline{3}^1 = \overline{3}$, $\overline{3}^2 = \overline{1}$ den $o(\overline{3}) = 2$ olup $\langle \overline{3} \rangle = \{\overline{3}, \overline{1}\} \neq U(8)$ dır.

(3) $\overline{5}^1 = \overline{5}$, $\overline{5}^2 = \overline{1}$ den $o(\overline{5}) = 2$ olup $\langle \overline{5} \rangle = \{\overline{5}, \overline{1}\} \neq U(8)$ dır.

(4) $\overline{7}^1 = \overline{7}$, $\overline{7}^2 = \overline{1}$ den $o(\overline{7}) = 2$ olup $\langle \overline{7} \rangle = \{\overline{7}, \overline{1}\} \neq U(8)$ dır.

Böylece $U(8)$ devirli bir grup değildir. ▲

Örnek 6.2.17 $\mathbb{Z}_8$ toplamsal grubunun $\langle \overline{2} \rangle = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{0}\}$ altgrubunun mertebesi 4 olduğundan $o(\overline{2}) = 4$ tür. ▲

Sonuç 6.2.18 *G bir grup ve $a \in G$ olsun. Eğer $o(a)$ sonlu ise o zaman a nın mertebesi $a^m = e$ şartını sağlayan en küçük pozitif m tamsayıdır.*

Örnek 6.2.19 $\tau = (1,3,2,8)(4,6)(5,7,9) \in S_9$ permütasyonunu göz önüne alalım. $o(\tau) = \text{ekok}(4,2,3) = 12$ dir. Gerçekten

$$\begin{aligned} \tau^{12} &= [(1,3,2,8)(4,6)(5,7,9)]^{12} \\ &= (1,3,2,8)^{12}(4,6)^{12}(5,7,9))^{12} \\ &= [(1,3,2,8)^4]^3[(4,6)^2]^6[(5,7,9)^3]^4 \\ &= (1) \end{aligned}$$

ve her $1 \leq k < 12$ için $\tau^k \neq (1)$ dir. ▲

Teorem 6.2.20 *G mertebesi $n \in \mathbb{Z}^+$ olan bir grup olsun. O zaman aşağıdakiler doğrudur.*

(i) *$g \in G$ olsun. O zaman $G = \langle g \rangle$ olması için gerek ve yeter şart $o(g) = n$ olmasıdır.*

(ii) *G nin devirli olması için gerek ve yeter şart G nin mertebesi n olan bir eleman içermesidir.*

Aşağıdaki örnek Teorem 6.2.20 nin sonsuz gruplar için doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 6.2.21 $G :=\text{GL}(2,\mathbb{Q})$ ve $g := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ olsun.

$$\langle g \rangle = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix} : \ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

olup g nin mertebesi sonsuzdur. Fakat $G \neq \langle g \rangle$ dir. ▲

Teorem 6.2.22 *Devirli bir grubun her altgrubu da devirlidir.*

6.3 Devirli Grupların Altgrupları ve Üreteçleri

Bu kısımda devirli grupların hangi elemanlarının üreteç olabileceğini ve bütün altgruplarının nasıl bulunacağı araştıracağız.

Teorem 6.3.1 *$G = \langle a \rangle$ ve $o(a) = n$ olsun. O zaman $m \in \mathbb{Z}$ ve $d = ebob(m,n)$ olmak üzere*

$$\langle a^m \rangle = \langle a^d \rangle$$

dir.

Örnek 6.3.2 $G = \langle a \rangle$ ve $o(a) = 20$ olsun. O zaman $\text{ebob}(8,20) = 4$ olduğundan $\langle a^8 \rangle = \langle a^4 \rangle$ dür. ▲

Sonuç 6.3.3 *$G = \langle a \rangle$ ve $o(a) = n$ olsun. O zaman n nin pozitif bir böleni d olmak üzere G nin bütün farklı altgrupları $\langle a^d \rangle$ şeklindedir.*

Teorem 6.3.4 *$G = \langle a \rangle$, $o(a) = n$ ve $m \in \mathbb{Z}$ olsun. a^m nin G nin bir üreteci olması için gerek ve yeter şart $ebob(n, m) = 1$ olmasıdır.*

Teorem 6.3.5 *$G = \langle a \rangle$ ve $o(a) = n$ olsun. $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere*

$$o(a^k) = \frac{n}{ebob(k, n)}$$

dir.

Örnek 6.3.6 $\mathbb{Z}_{20}$ içinde $o(\overline{8})$ i belirleyelim. $\mathbb{Z}_{20} = \langle \overline{1} \rangle$ ve $o(\overline{1}) = 20$ dir. Ayrıca $\overline{8} = 8.\overline{1}$ dir. Böylece Teorem 6.3.5 gereğince

$$o(\overline{8}) = \frac{20}{\text{ebob}(20, 8)} = \frac{20}{4} = 5$$

tir. ▲

Örnek 6.3.7 $G = \langle a \rangle$ ve $o(a) = 12$ olsun. G grubununun bütün altgruplarını ve üreteçlerini belirlemeye çalışalım. $d \mid 12$ olmak üzere, Sonuç 6.3.3 gereğince G nin bütün farklı altgrupları $\langle a^d \rangle$ şeklindedir. $d = 1, 2, 3, 4, 6, 12$ olduğundan G nin bütün altgrupları:

$$\begin{aligned}
H_1 =& \langle a^1 \rangle = G \\
H_2 =& \langle a^2 \rangle = \{e, a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}\} \\
H_3 =& \langle a^3 \rangle = \{e, a^3, a^6, a^9\} \\
H_4 =& \langle a^4 \rangle = \{e, a^4, a^8\} \\
H_5 =& \langle a^6 \rangle = \{e, a^6\} \\
H_6 =& \langle a^{12} \rangle = \{e\}
\end{aligned}$$

şeklindedir.
Ayrıca $k = 1, 5, 7, 11$ için ebob$(k, 12) = 1$ olup $G = \langle a^1 \rangle = \langle a^5 \rangle = \langle a^7 \rangle = \langle a^{11} \rangle$ dir. ▲

Örnek 6.3.8 $G = \{-1, 1, -i, i\}$, i tarafından üretilen devirli bir gruptur. Bu grubun üreteçleri ebob$(1, 4) =$ ebob$(3, 4) = 1$ olduğundan i ve $i^3 = -i$ dir. Böylece G nin bütün altgrupları $\langle i \rangle$, $\langle -1 \rangle$ ve $\langle 1 \rangle$ şeklindedir. ▲

Teorem 6.3.9 *H ve K iki sonlu grup, $G := H \times K$ ve $(h, k) \in G$ olsun. O zaman*

$$o((h, k)) = ekok(o(h), o(k))$$

dır.

Örnek 6.3.10 $\mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_5$ içinde mertebesi 5 olan bütün elemanların sayısını belirleyelim.

$$5 = o((a,b)) = \text{ekok}(o(a), o(b))$$

şartını sağlayan $(a,b) \in \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_5$ elemanlarını belirleyelim. Burada $o(a) = 5$, $o(b) = 5$ veya $o(a) = 1$, $o(b) = 5$ veya $o(a) = 5$, $o(b) = 1$ tir. Birinci durumda $a = \overline{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}$ ve $b = \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ olabilir. Böylece birinci durumda mertebesi 5 olan 16 eleman vardır. Bu elemanlar:

$$(\overline{5},\overline{1}), (\overline{5},\overline{2}), (\overline{5},\overline{3}), (\overline{5},\overline{4}), (\overline{10},\overline{1}), (\overline{10},\overline{2}), (\overline{10},\overline{3}), (\overline{10},\overline{4}),$$

$$(\overline{15},\overline{1}), (\overline{15},\overline{2}), (\overline{15},\overline{3}), (\overline{15},\overline{4}), (\overline{20},\overline{1}), (\overline{20},\overline{2}), (\overline{20},\overline{3}), (\overline{20},\overline{4})$$

şeklindedir. İkinci durumda $a = \overline{0}$ ve $b = \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ olur. Dolayısıyla bu durumda mertebesi 5 olan 4 eleman vardır. Bu elemanlar:

$$(\overline{0},\overline{1}), (\overline{0},\overline{2}), (\overline{0},\overline{3}), (\overline{0},\overline{4})$$

şeklindedir. Üçüncü durumda $a = \overline{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}$ ve $b = \overline{0}$ olur. Bu durumda mertebesi 5 olan 4 eleman vardır. Bu elemanlar:

$$(\overline{5},\overline{0}), (\overline{10},\overline{0}), (\overline{15},\overline{0}), (\overline{20},\overline{0})$$

şeklindedir. ▲

Teorem 6.3.11 *H ve K iki sonlu devirli grup ve $G := H \times K$ olsun. O zaman G nin devirli olması için gerek ve yeter şart ebob $(|H|, |K|) = 1$ (yani H nın ve K nın mertebeleri aralarında asal) olmasıdır.*

Sonuç 6.3.12 *$\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ nin devirli olması için gerek ve yeter şart ebob$(m,n) = 1$ olmasıdır.*

Örnek 6.3.13 Sonuç 6.3.11 gereğince $\mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_{100}$, $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{27}$ grupları devirli değil fakat $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{27}$ ve $\mathbb{Z}_{13} \oplus \mathbb{Z}_{11}$ grupları devirlidir. ▲