Bölüm 7

Grup Homomorfizmaları ve İzomorfizmalar

Bu bölümde verilen gruplar arasında grup işlemlerini koruyan fonksiyonları ele alacağız. Bu fonksiyonlar yardımıyla verilen grupların cebirsel yapılarının aynı olup olmadığını araştıracağız.

7.1 Grup Homomorfizmaları

Bu kısımda "grup homomorfizması" adı verilen ve verilen gruplar arasında işlem koruyan fonksiyonları inceleyeceğiz.

Tanım 7.1.1 *$(G, \odot)$ ve $(G^{'}, \otimes)$ iki grup olmak üzere $f\colon G \longrightarrow G^{'}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a,\ b \in G$ için*

$$f(a \odot b) = f(a) \otimes f(b)$$

oluyorsa o zaman f ye **grup homomorfizması** *adı verilir. Eğer f homomorfizması birebir ise o zaman f ye bir* **monomorfizma**, *f örten ise bir* **epimorfizma**, *f birebir ve örten ise bir* **izomorfizma** *adını alır. Ayrıca, eğer $G = G^{'}$ ve f bir homomorfizma ise o zaman f ye bir* **endomorfizma**, *f bir izomorfizma ise f ye bir* **otomorfizma** *denir.*

Uyarı 7.1.2 Eğer $\theta\colon G \to G'$ bir izomorfizma ise o zaman G grubu G' ye **izomorftur** denir ve $G \cong G'$ ile gösterilir. Ayrıca $\theta^{-1}\colon G' \to G$ de bir izomorfizmadır. Eğer $\theta'\colon G' \to G''$ bir izomomorfizma ise o zaman $\theta \circ \theta'\colon G \to G''$ de bir izomorfizmadır. Yani eğer $G \cong G'$ ve $G' \cong G''$ ise o zaman $G \cong G''$ dur. Böylece eğer $G \cong G'$ ise o zaman $G' \cong G$ dir. Bu nedenle daha çok "G ile G' izomorfiktir" ifadesi kullanılır. Ayrıca her G grubu kendisine izomorftur. $\theta\colon G \to G'$ fonksiyonunun bir izomorfizma olmasının temel anlamı, G ve G' gruplarının grup olarak eş yapılı olmalarıdır. Elemanları veya işlemleri farklı olsalar bile yapı olarak aynıdırlar.

Eğer G ile G' grupları izomorfik değilse o zaman $G \ncong G'$ gösterimi kullanılır. ♦

Örnek 7.1.3 $\theta\colon\ \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n\ ,\quad \theta(x) = \overline{x}$ şeklinde tanımlanan θ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}\theta(x+y) &= \overline{x+y}\\ &= \overline{x}+\overline{y}\\ &= \theta(x)+\theta(y)\end{aligned}$$

olduğundan θ bir homomorfizmadır. ▲

Örnek 7.1.4 $\theta\colon\ (\mathbb{R},+) \longrightarrow (\mathbb{R},+),\quad \theta(x) = x^2$ şeklinde tanımlanan θ fonksiyonunu göz önüne alalım. $x,\ y$ sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$\theta(x+y) \quad = \quad (x+y)^2 \quad = \quad x^2+2xy+y^2 \quad \neq \quad x^2+y^2 \quad = \quad \theta(x)+\theta(y)$$

olduğundan θ bir homomorfizma değildir. ▲

Tanım 7.1.5 *$\theta\colon G \longrightarrow G^{'}$ bir grup homomorfizması olmak üzere*

$$Ker\theta = \{x \in G\colon \theta(x) = e_{G'}\}$$

kümesine θ ***nın çekirdeği*** *denir.*

Örnek 7.1.6 $\theta\colon\ \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n\ ,\ \ \theta(x) = \overline{x}$ şeklinde tanımlanan homomorfizmanın çekirdeği ve görüntü kümesi

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\theta &= \{x \in \mathbb{Z} : \theta(x) = \overline{0}\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z} :\ \overline{x} = \overline{0}\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z} :\ x \equiv 0 \pmod{n}\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z} :\ n \mid x\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z} :\ x = nk,\ k \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{nk :\ k \in \mathbb{Z}\}\\ &= n\mathbb{Z}\\ \mathrm{Im}\theta &= \{\theta(x) : x \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{\overline{x} :\ x \in \mathbb{Z}\}\\ &= \mathbb{Z}_n\end{aligned}$$

şeklindedir. ▲

Şimdi grup homomorfizmalarının bazı özelliklerini inceleyelim.

Teorem 7.1.7 *$\theta\colon G \longrightarrow G^{'}$ bir grup homomorfizması olsun. Bu durumda*

(i) $\theta(e_G) = e_{G'}$,

(ii) *her $g \in G$ için $\theta(g^{-1}) = [\theta(g)]^{-1}$ dir.*

Teorem 7.1.8 *$\theta\colon G \longrightarrow G^{'}$ grup homomorfizmasının bir monomorfizma olması için gerek ve yeter şart $Ker\theta = \{e_G\}$ olmasıdır.*

Örnek 7.1.9 $\theta\colon\ \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z},\ \ \theta(x) = 2x$ şeklinde tanımlanan θ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}\theta(x+y) \quad &= 2(x+y)\\ &= 2x+2y\\ &= \theta(x) + \theta(y)\end{aligned}$$

olduğundan θ bir homomorfizmadır.

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\theta \quad &= \{\theta(x) : x \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{2x : x \in \mathbb{Z}\}\\ &= 2\mathbb{Z}\end{aligned}$$

olduğundan θ örtendir.

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\theta \quad &= \{x \in \mathbb{Z} : \theta(x) = 0\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z} : 2x = 0\}\\ &= \{0\}\end{aligned}$$

olduğundan θ birebirdir. O halde $\mathbb{Z} \cong 2\mathbb{Z}$ dir. ▲

Örnek 7.1.10 G ve H sonlu gruplar, eğer $f\colon G \longrightarrow H$ bir grup monomorfizması ve $a \in G$ ise o zaman $o(a) = o(f(a))$ dir. ▲

Şimdi izomorf olan ve olmayan gruplara örnekler verelim.

Örnek 7.1.11 $G = \{1, -1, i, -i\}$ çarpımsal grubu ile $G^{'} = \mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ toplamsal grubunun izomorf olup olmadığını araştıralım. G ve $G^{'}$ gruplarının eleman sayıları eşit olduğundan bu iki grup arasında birebir ve örten bir fonksiyon kurulabilir. Dört elemanlı iki küme arasında kurulabilecek birebir ve örten fonksiyonların sayısının 24 olduğu göz önüne alındığında bu eşlemelerden hangilerinin homomorfizma şartını sağladığı sorusu büyük bir önem taşımaktadır. Verilen her iki grubun da devirli olması sebebiyle üreteçleri birbirleriyle eşleyen $\theta(i) = \overline{1}$ şeklinde tanımladıktan sonra (üreteci üretece eşleyerek) θ bir homomorfizma olacak şekilde diğer elemanların görüntüleri de belirlenebilir.

$$\theta(i) = \overline{1}, \quad \theta(-1) = \overline{2}, \quad \theta(-i) = \overline{3}, \quad \theta(1) = \overline{0}$$

Verilen gruplar sonlu olduğundan θ nın izomorfizma olduğunu görebilmek için G ve $G^{'}$ nün işlem tablolarını kullanabiliriz. Aşağıda verilen G grubunun çarpım tablosunda her x elemanı yerine $\theta(x)$ yazdığımızda oluşan tablonun, satır ve sütun farkı gözetmeksizin $G^{'}$ nün toplama tablosu ile yapısal olarak aynı olduğu görülmektedir. Bundan dolayı her $x,\ y \in G$ için $\theta(xy) = \theta(x) + \theta(y)$ dir. Sonuç olarak θ bir izomorfizma yani $\{1, i, -i, 1\} \cong \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ tür.

G nin çarpım tablosu

$\cdot$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

$\xrightarrow{\theta}$

$\theta(G)$ nin çarpım tablosu

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

▲

Örnek 7.1.12 $(\mathbb{R},+)$ toplamsal grubu ile $(\mathbb{R}^+,.)$ çarpımsal grubu verilmiş olsun. $\theta\colon (\mathbb{R},+) \longrightarrow (\mathbb{R}^+,.)$, $\theta(x) = 3^x$ ile tanımlanan fonksiyonu göz önüne alalım.

(i) $x,\ y \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}\theta(x+y) \quad &= 3^{x+y}\\ &= 3^x 3^y\\ &= \theta(x)\theta(y)\end{aligned}$$

olduğundan θ bir homomorfizmadır.

(ii) $x \in \mathrm{Ker}\theta$ olsun. O zaman $\theta(x) = 3^x = 1$ dir. Bu eşitlik ancak $x = 0$ için sağlandığından $\mathrm{Ker}\theta = \{0\}$, yani θ bir monomorfizmadır.

(iii) $y \in \mathbb{R}^+$ için $y = \theta(x)$ olacak şekilde $x = log_3\, y \in \mathbb{R}$ olduğundan θ bir epimorfizmadır.

Bu durumda θ bir izomorfizma olup, $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^+$ dır. ▲

Örnek 7.1.13 $U(10) \ncong U(12)$ olduğunu gösterelim. $U(12) = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\}$ ve $\overline{1}^2 = \overline{5}^2 = \overline{7}^2 = \overline{11}^2 = \overline{1}$ dir. Diğer bir deyişle her $x \in U(12)$ için $x^2 = \overline{1}$ dir. Şimdi kabul edelim ki $f\colon U(10) \to U(12)$ bir izomorfizma olsun. O zaman

$$f(\overline{9}) = f(\overline{3}\cdot\overline{3}) = f(\overline{3})f(\overline{3}) = [f(\overline{3})]^2 = \overline{1}$$

ve

$$f(\overline{1}) = f(\overline{1}\cdot\overline{1}) = f(\overline{1})f(\overline{1}) = [f(\overline{1})]^2 = \overline{1}$$

dır. Fakat f birebir olduğundan $\overline{1} = \overline{9}$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Bundan dolayı $U(10) \ncong U(12)$ dir. ▲

Teorem 7.1.14 *Her sonsuz devirli grup $\mathbb{Z}$ ye ve mertebesi n olan her devirli grup $\mathbb{Z}_n$ ye izomorftur.*

Örnek 7.1.15 $U(10) \cong \mathbb{Z}_4$ ve $U(5) \cong \mathbb{Z}_4$ tir. ▲

Tanım 7.1.16 *$\theta\colon G \longrightarrow G'$ grup epimorfizması olsun. O zaman G' grubuna G nin* **homomorfik görüntüsü** *adı verilir.*

Örnek 7.1.17 $\theta\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$, $\theta(x) = \overline{x}$ şeklinde tanımlanan grup epimorfizmasını göz önüne alalım. Bu durumda $\mathbb{Z}_n$ grubu $\mathbb{Z}$ grubunun homomorfik görüntüsü olur. ▲

Şimdi verilen bir grubun bir permütasyon grubuyla aynı grup yapısına sahip olduğunu ifade eden Cayley Teoremini verelim.

Teorem 7.1.18 (Cayley Teoremi) *Her grup bir permütasyon grubuna izomorftur.*

Örnek 7.1.19 $G = \{1, i, -1, -i\}$ grubunun izomorf olduğu permütasyon grubunu bulalım. $a \in G$ için $f_a(x) = ax$ ile tanımlı $f_a\colon \quad G \quad \longrightarrow \quad G$ fonksiyonları ile

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}, \qquad f_i = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ i & -1 & -i & 1 \end{pmatrix},$$
$$f_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ -1 & -i & 1 & i \end{pmatrix}, \; f_{-i} = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ -i & 1 & i & -1 \end{pmatrix}$$

permütasyonları elde edilir. Bu permütasyonlar $f_1(x) = x$, $f_i(x) = ix$, $f_{-1}(x) = -x$ ve $f_{-i}(x) = -ix$ şeklinde de ifade edilebilir. $G' = \{f_1, f_i, f_{-1}, f_{-i}\}$ olmak üzere $\phi\colon G \to G'$ fonksiyonu $a \in G$ için

$$\phi(1) = f_1,\ \phi(i) = f_i,\ \phi(-1) = f_{-1},\ \phi(-i) = f_{-i}$$

şeklinde tanımlanırsa o zaman ϕ fonksiyonu bir izomorfizma olur. Böylece $G \cong G'$ dır. ▲

Örnek 7.1.20 $G := \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ olsun. $a := (\overline{0}, \overline{0})$, $b := (\overline{1}, \overline{0})$, $c := (\overline{0}, \overline{1})$ ve $d := (\overline{1}, \overline{1})$ olsun. O zaman $G = \{a, b, c, d\}$ olur. Her $g \in G$ için f_g fonksiyonlarını belirleyelim. Her $x \in G$ için $f_a(x) = (\overline{0}, \overline{0}) + x = x$ ve böylece $f_a = \iota_G = (a)(b)(c)(d)$ olur. Ayrıca

$$f_b(a) = b + a = (\overline{1}, \overline{0}) + (\overline{0}, \overline{0}) = (\overline{1}, \overline{0}) = b$$
$$f_b(b) = b + b = (\overline{1}, \overline{0}) + (\overline{1}, \overline{0}) = (\overline{0}, \overline{0}) = a$$
$$f_b(c) = b + c = (\overline{1}, \overline{0}) + (\overline{0}, \overline{1}) = (\overline{1}, \overline{1}) = d$$
$$f_b(d) = b + d = (\overline{1}, \overline{0}) + (\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{0}, \overline{1}) = c$$

olduğundan $f_b = (a, b)(c, d)$ dir. Burada

$$f_b = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix} = (a, b)(c, d)$$

gösterimine dikkat ediniz. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
f_c(a) &= c + a = (\overline{0},\overline{1}) + (\overline{0},\overline{0}) = (\overline{0},\overline{1}) = c \\
f_c(c) &= c + c = (\overline{0},\overline{1}) + (\overline{0},\overline{1}) = (\overline{0},\overline{0}) = a \\
f_c(b) &= c + b = (\overline{0},\overline{1}) + (\overline{1},\overline{0}) = (\overline{1},\overline{1}) = d \\
f_c(d) &= c + d = (\overline{0},\overline{1}) + (\overline{1},\overline{1}) = (\overline{1},\overline{0}) = b
\end{aligned}$$

olduğundan $f_c = (a,c)(b,d)$ ve

$$\begin{aligned}
f_d(a) &= d + a = (\overline{1},\overline{1}) + (\overline{0},\overline{0}) = (\overline{1},\overline{1}) = d \\
f_d(c) &= d + d = (\overline{1},\overline{1}) + (\overline{1},\overline{1}) = (\overline{0},\overline{0}) = a \\
f_d(b) &= d + b = (\overline{1},\overline{1}) + (\overline{1},\overline{0}) = (\overline{0},\overline{1}) = c \\
f_d(d) &= d + c = (\overline{1},\overline{1}) + (\overline{0},\overline{1}) = (\overline{1},\overline{0}) = b
\end{aligned}$$

olduğundan $f_d = (a,d)(b,c)$ dir. Böylece,

$$(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, +) \cong (\{(a),(a,b)(c,d),(a,c)(b,d),(a,d)(b,c)\}, \circ)$$

dir. $a,\ b,\ c,\ d$ yerine sırasıyla $1,\ 2,\ 3,\ 4$ alarak

$$(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, +) \cong (\{(1),(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}, \circ)$$

olduğu da gösterilebilir. ▲