Bölüm 8

Kosetler ve Lagrange Teoremi

Bu bölümde verilen herhangi bir grubunun bir altgrubu yardımıyla tanımlanan bir denklik bağıntısı ve bu bağıntı sonucunda ortaya çıkan denklik sınıfları ele alınacaktır. Ayrıca sonlu gruplar için büyük bir öneme sahip olan Lagrange Teoremi verilecek ve bu teorem vasıtasıyla sonlu gruplarının altgrupları belirlenecektir.

8.1 Kosetler

Bu kısımda bir grubunun belirli bir altgrubu kullanılarak bir denklik bağıntısı tanımlanıp bu bağıntı sonucunda ortaya çıkan denklik sınıfları belirlenecek ve özellikleri araştırılacaktır.

Tanım 8.1.1 *A ve B kümeleri bir G grubunun boş olmayan iki altkümesi olmak üzere*

$$AB = \{ab : \ a \in A, \ b \in B\}$$

kümesine **A ile B kümelerinin çarpımı** *adı verilir. Eğer $g, \ h \in G$ için $A = \{g\}$ ise o zaman $\{g\}B = gB$ ve $B = \{h\}$ ise o zaman $A\{h\} = Ah$ şeklinde gösterilir.*

G grubu toplamsal ise o zaman $A + B$ (A ile B nin toplamı) ve $g + B$, $A + h$ gösterimleri kullanılacaktır.

Teorem 8.1.2 *G bir grup ve A, B, C kümeleri G grubunun boş kümeden farklı altkümeleri olsun. Bu durumda*

(i) *$A(BC) = (AB)C$ dir.*

(ii) *Eğer $B = C$ ise o zaman $AB = AC$ ve $BA = CA$ dır.*

(iii) *Genel olarak AB çarpımı değişmeli değildir, yani $AB \neq BA$ dır.*

(iv) *$AB = AC$ olması $B = C$ olmasını gerektirmez.*

(v) *Eğer bir $g \in G$ için $gA = gB$ ise o zaman $A = B$ dir.*

Tanım 8.1.3 *G bir grup ve $H \leq G$ olsun. G üzerinde $\equiv_r \pmod{H}$ bağıntısını*

$$a \equiv_r b \pmod{H} \text{ olması için gerek ve yeter şart } ab^{-1} \in H \text{ olmasıdır}$$

şeklinde tanımlayalım.

Önerme 8.1.4 *$\equiv_r \pmod{H}$ bağıntısı G üzerinde bir denklik bağıntısıdır ve bu bağıntıya göre $a \in G$ nin denklik sınıfı*

$$[a] = Ha = \{ha : h \in H\}$$

dır.

Tanım 8.1.5 *G bir grup, $H \leq G$ olsun. $a \in G$ olmak üzere*

$$Ha = \{ha : h \in H\}$$

kümesine H kümesinin G grubu içindeki bir **sağ koseti** *adı verilir.*

Uyarı 8.1.6 G bir grup ve $H \leq G$ olmak üzere G de $\equiv_l \pmod{H}$ bağıntısını

$$a \equiv_l b \pmod{H} \text{ olması için gerek ve yeter şart } a^{-1}b \in H \text{ olmasıdır}$$

şeklinde tanımlayacak olursak $\equiv_l \pmod{H}$ bağıntısı G üzerinde bir denklik bağıntısı olup, $a \in G$ nin denklik sınıfı

$$[a] = aH = \{ah : h \in H\}$$

dır. ♦

Tanım 8.1.7 *G bir grup, $H \leq G$ olsun. $a \in G$ olmak üzere*

$$aH = \{ah : h \in H\}$$

kümesine H kümesinin G grubu içindeki bir **sol koseti** *adı verilir.*

Uyarı 8.1.8 G bir grup ve $H \leq G$ olmak üzere $a \in G$ için her zaman $aH = Ha$ olmak zorunda değildir. ♦

Örnek 8.1.9

$$S_3 = \{(1), (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$$

simetrik grubunun $K = \{(1), (1,2)\}$ altgrubunu ele alalım. $a = (1,2,3) \in S_3$ için

$$aK = \{(1,2,3)(1), (1,2,3)(1,2)\} = \{(1,2,3), (1,3)\}$$

ve

$$Ka = \{(1)(1,2,3), (1,2)(1,2,3)\} = \{(1,2,3), (2,3)\}$$

olduğundan $aK \neq Ka$ dır. ▲

Lemma 8.1.10 *G bir grup ve $H \leq G$ olsun. H altgrubunun G grubu içindeki sol (sağ) kosetlerinin kümesi G grubunun bir ayrışımını verir.*

Örnek 8.1.11 $S_3 = \{(1),(1,2),(1,3),(2,3),(1,2,3),(1,3,2)\}$ simetrik grubunu göz önüne alalım. $K = \{(1),(1,2)\}$ altgrubu için $(123)K = \{(1,2,3),(1,3)\}$ elde edilir. $(1,3) \in (1,2,3)K$ olduğundan $(1,3)K = (1,2,3)K = \{(1,2,3),(1,3)\}$ olur. Benzer şekilde $(1)K = (1,2)K = \{(1),(1,2)\}$ ve $(2,3)K = (1,3,2)K = \{(1,3,2),(2,3)\}$ kosetleri bulunur. Böylece K altgrubunun G grubu içindeki bütün sol kosetleri $K,\ (1,2,3)K,\ (1,3,2)K$ şeklindedir. ▲

Örnek 8.1.12 $\mathbb{Z}_{12}$ nin $K = \langle\overline{6}\rangle = \{\overline{6},\overline{0}\}$ altgrubunu göz önüne alalım. K nın $\mathbb{Z}_{12}$ içindeki bütün farklı kosetleri $\overline{0}+K,\ \overline{1}+K,\ \overline{2}+K,\ \overline{3}+K,\ \overline{4}+K,\ \overline{5}+K$ dır. ▲

Uyarı 8.1.13 G bir grup ve $H \leq G$ olsun. H altgrubunun G grubu içindeki sol kosetlerinin sayısı (kardinalitesi) ile sağ kosetlerinin sayısı (kardinalitesi) birbirine eşittir. ♦

Tanım 8.1.14 *G bir grup ve $H \leq G$ olmak üzere H altgrubunun G grubu içindeki sol kosetlerinin sayısına (kosetlerden oluşan kümenin kardinalitesine) H nın G içindeki* **indeksi** *adı verilir ve $|G:H|$ ile gösterilir.*

Örnek 8.1.15 A_3 alterne grubunun S_3 simetrik grubu içindeki bütün farklı sol kosetleri $A_3,\ (12)A_3$ olduğundan $|S_3 : A_3| = 2$ dir. ▲

8.2 Lagrange Teoremi

Bu kısımda sonlu ve devirli olmayan grupların altgruplarını belirlemede kullanılan önemli bir teoremi vereceğiz.

Teorem 8.2.1 (Lagrange Teoremi) *G sonlu bir grup ve $H \leq G$ olsun. Bu durumda H altgrubunun mertebesi G grubunun mertebesini böler.*

Sonuç 8.2.2 *G sonlu bir grup ve $a \in G$ olsun. Bu durumda a elemanının mertebesi G grubunun mertebesini böler.*

Örnek 8.2.3 G mertebesi 189 olan bir grup ve $a,b \in G$ için $o(a) = 9,\ o(b) = 21$ olsun. $H \neq G$ olmak üzere Lagrange Teoremi yardımıyla $H = \langle a,b\rangle$ altgrubunun mertebesini bulalım. G grubu sonlu olduğundan $H = \langle a,b\rangle \leq G$ için Lagrange Teoremi gereğince $|H| \mid 189$ dur. Bu durumda $|H| = 1,3,7,9,21,27,63$ veya 189 olabilir. $H \neq G$ olduğundan $|H| \neq 189$ dur. $\langle a\rangle \leq H$ olduğundan $o(a) \mid |H|$ yani $9 \mid |H|$ dır. Benzer şekilde $\langle b\rangle \leq H$ olduğundan $o(b) \mid |H|$ olup $21 \mid |H|$ dır. Eğer $9 \mid |H|$ ve $21 \mid |H|$ ise o zaman $\text{ekok}(9,21) = 63$ olduğundan $63 \mid |H|$ dir. Bu sebeple $|H| = 63$ tür. ▲

Lagrange Teoreminin karşıtı doğru değildir.

Örnek 8.2.4 A_4 alterne grubu göz önüne alındığında $|A_4| = 12$ ve $6 \mid 12$ olmasına rağmen A_4 grubunun mertebesi 6 olan altgrubu yoktur (Gösteriniz). ▲

Sonuç 8.2.5 *Mertebesi bir asal sayı olan her grup devirlidir.*

Örnek 8.2.6

$$S_3 = \{(1), (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$$

simetrik grubunun bütün altgruplarını Lagrange Teoremi yardımıyla belirleyelim. Eğer $H \leq S_3$ ise o zaman $|H| \mid |S_3| = 6$ dir. O halde $|H| = 1, 2, 3$ veya 6 olabilir. Eğer $|H| = 1$ ise o zaman $H_1 = \langle(1)\rangle = \{(1)\}$ dir. Eğer $o(H) = 2$ ise mertebesi asal olan her grup devirli olduğundan $H_2 = \langle(1,2)\rangle = \{(1), (1,2)\}$, $H_3 = \langle(1,3)\rangle = \{(1), (1,3)\}$ ve $H_4 = \langle(2,3)\rangle = \{(1), (2,3)\}$ şeklindedir. Eğer $|H| = 3$ ise $H_5 = \langle(1,2,3)\rangle = \{(1), (1,2,3), (1,3,2)\} = \langle(1,3,2)\rangle = A_3$ dür. Son olarak eğer $|H| = 6$ ise o zaman $H_6 = S_3$ bulunur. ▲

Örnek 8.2.7 (Mertebesi 4 Olan Grupların Sınıflandırılması) G mertebesi 4 olan bir grup olsun. O zaman $G = \{e, a, b, ab\}$ şeklindedir. Eğer G devirli ise o zaman $G \cong \mathbb{Z}_4$ tür. Şimdi G devirli olmasın. O zaman Lagrange Teoreminden dolayı $o(a) \neq 4$ ve $o(a) \mid 4$ olduğundan ve benzer durum b ve ab için de geçerli olduğundan $o(a) = o(b) = o(ab) = 2$ dir. Şimdi $f\colon G \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $f(e) = (0,0)$, $f(a) = (1,0)$, $f(b) = (0,1)$ ve $f(ab) = (1,1)$ şeklinde tanımlayalım. O zaman f bir izomorfizmadır. Yani $G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ dir. Dolayısıyla mertebesi 4 olan bir grup ya $\mathbb{Z}_4$ e ya da $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ ye izomorftur. Böylece mertebesi 4 olan gruplar sınıflandırılmış olur. ▲