Bölüm 9

Normal Altgruplar ve Bölüm Grupları

Bu bölümde verilen bir grupta belirli bir altgrubun sol ve sağ kosetlerinin birbirine eşit olması durumu ele alınacaktır. Bu durumda söz konusu altgruba "normal altgrup" adı verilecek ve bu altgrupların özellikleri araştırılacaktır. Ayrıca grupların bölüm kümelerinden normal altgruplar sayesinde bölüm grupları elde edilecek ve bölüm gruplarının bazı özellikleri incelenecektir.

9.1 Normal Altgruplar

Bu kısımda bir grubun "normal altgrubu" kavramı tanımlanıp, bazı örnekler verilecek ve özellikleri incelenecektir.

Tanım 9.1.1 *G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer her $x \in G$ için $xH = Hx$ oluyorsa H altgrubuna G grubunun* **normal altgrubu** *adı verilir ve $H \trianglelefteq G$ ile gösterilir. Eğer $H \neq G$ ise o zaman $H \triangleleft G$ şeklinde gösterilir.*

Örnek 9.1.2 $A_3 = \{(1), (1,2,3), (1,3,2)\}$ alterne grubunun S_3 simetrik grubunun normal altgrubu olduğunu gösterelim. Öncelikle $A_3 < S_3$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda sadece her $x \in S_3$ için $xA_3 = A_3x$ olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
(1)A_3 &= A_3 &&= A_3(1)\\
(1,2,3)A_3 &= A_3 &&= A_3(1,2,3)\\
(1,3,2)A_3 &= A_3 &&= A_3(1,3,2)\\
(1,2)A_3 &= \{(1,2),(2,3),(1,3)\} &&= A_3(1,2)\\
(1,3)A_3 &= \{(1,2),(2,3),(1,3)\} &&= A_3(1,3)\\
(2,3)A_3 &= \{(1,2),(2,3),(1,3)\} &&= A_3(2,3)
\end{aligned}$$

olduğundan $A_3 \triangleleft S_3$ dir. ▲

Örnek 9.1.3 S_3 simetrik grubunun $H = \{(1), (1,3)\}$ altgrubunu göz önüne alalım. $x = (1,2,3) \in S_3$ için

$$Hx = \{(1)(1,2,3), (1,3)(1,2,3)\} = \{(1,2,3), (1,2)\}$$

ve

$$xH = \{(1,2,3)(1), (1,2,3)(1,3)\} = \{(1,2,3), (2,3)\}$$

olup $Hx \neq xH$ dır. Bu sebeple H altgrubu S_3 içerisinde normal değildir. ▲

Örnek 9.1.4 G bir grup olmak üzere $\{e\}$ aşikar altgrubu ve G grubu G nin normal altgruplarıdır. ▲

Örnek 9.1.5 Değişmeli bir grubun her altgrubu normaldir. ▲

Teorem 9.1.6 *G bir grup ve $H \leq G$ olsun. $H \trianglelefteq G$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in G$ ve her $h \in H$ için $xhx^{-1} \in H$ olmasıdır.*

Örnek 9.1.7 Bir G grubunun merkezi olarak bilinen $Z(G) = \{x \in G : \text{her } g \in G \text{ için } gx = xg\}$ altgrubu G nin bir normal altgrubudur. ▲

Örnek 9.1.8 S_4 simetrik grubunun

$$H = \langle (1,2,3) \rangle = \{(1), (1,2,3), (1,3,2)\}$$

altgrubunu göz önüne alalım. $g = (1,2,3,4) \in S_4$ ve $h = (1,2,3) \in H$ için

$$ghg^{-1} = (1,2,3,4)(1,2,3)(1,4,3,2) = (2,3,4)$$

ve $(2,3,4) \notin H$ olduğundan H altgrubu S_4 içinde normal değildir. ▲

Teorem 9.1.9 *$\theta : G \longrightarrow G'$ bir grup homomorfizması olmak üzere $Ker\theta \trianglelefteq G$ dir.*

9.2 Bölüm Grupları

G bir grup ve $N \trianglelefteq G$ olsun. G nin N ye göre sol kosetlerinin kümesi

$$G/N := \{aN : a \in G\}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 9.2.1 *G bir grup ve $N \trianglelefteq G$ olsun. Eğer her $aN,\ bN \in G/N$ için*

$$(aN) \cdot (bN) = abN$$

şeklinde tanımlanırsa G/N bir gruptur. Birim elemanı $e_G N$ şeklinde, her $aN \in G/N$ nin tersi, $a^{-1}N$ şeklindedir. Ayrıca eğer G değişmeli ise o zaman G/N de değişmelidir.

Tanım 9.2.2 *G bir grup ve $N \trianglelefteq G$ olsun. O zaman G/N grubuna G nin N ye göre* **bölüm grubu** *adı verilir.*

Uyarı 9.2.3 Eğer G toplamsal bir grup ise o zaman $G/N = \{a + N : a \in G\}$ şeklindedir. Ayrıca G/N nin birim elemanı $0 + N$ ve $a + N \in G/N$ nin tersi $(-a) + N$ dir. ♦

Uyarı 9.2.4 Eğer G sonlu bir grup ve $N \trianglelefteq G$ ise o zaman $|G/N| = \dfrac{|G|}{|N|} = |G : N|$ dir. ♦

Örnek 9.2.5 $G = A_5$ alterne grubu, G nin

$$H = \{\sigma \in G : \sigma(5) = 5\}$$

ve

$$K = \{\sigma \in G : \sigma(4) = 4\}$$

altgruplarını göz önüne alalım. O zaman

$$H \cap K = \{\sigma \in A_5 :\ \sigma(4) = 4 \text{ ve } \sigma(5) = 5\} = \{(1), (1,2,3), (1,3,2)\}$$

olduğundan $|G : H \cap K| = \dfrac{|\ G\ |}{|\ H \cap K\ |} = \dfrac{60}{3} = 20$ dir. ▲

Örnek 9.2.6 $\mathbb{Z}$ toplamsal grubunun $3\mathbb{Z}$ normal altgrubunu göz önüne alalım. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{a+3\mathbb{Z} :\ a \in \mathbb{Z}\} = \{0+3\mathbb{Z}, 1+3\mathbb{Z}, 2+3\mathbb{Z}\}$ bölüm grubunun işlem tablosu aşağıdaki gibidir:

$+$	$0+3\mathbb{Z}$	$1+3\mathbb{Z}$	$2+3\mathbb{Z}$
$0+3\mathbb{Z}$	$0+3\mathbb{Z}$	$1+3\mathbb{Z}$	$2+3\mathbb{Z}$
$1+3\mathbb{Z}$	$1+3\mathbb{Z}$	$2+3\mathbb{Z}$	$0+3\mathbb{Z}$
$2+3\mathbb{Z}$	$2+3\mathbb{Z}$	$0+3\mathbb{Z}$	$1+3\mathbb{Z}$

Tablo 9.1: $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ Bölüm Grubunun İşlem Tablosu ▲

Uyarı 9.2.7 $n \geq 2$ bir tamsayı olmak üzere $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ grubunu göz önüne alalım. O zaman $m + n\mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} m + n\mathbb{Z} &= \{m + nz \mid z \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{k \mid k \equiv m \pmod n\} \\ &= \overline{m} \end{aligned}$$

olduğundan $m + n\mathbb{Z} = \overline{m}$, yani

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$$

dir. ♦

Teorem 9.2.8 *G bir grup ve $N \trianglelefteq G$ olsun. O zaman*

$$\pi : G \to G/N, \quad \pi(a) = aN$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir epimorfizmadır. Bu epimorfizmaya **doğal (kanonik) epimorfizma** *adı verilir.*

Uyarı 9.2.9 G bir grup ve $N \trianglelefteq G$ olsun. π doğal epimorfizması örten olduğundan G/N bölüm grubu G grubunun bir homomorfik görüntüsüdür. ♦

Uyarı 9.2.10 Bir G grubunun $N \trianglelefteq G$ altgrubu için $\pi : G \longrightarrow G/N$ doğal epiomorfizmasını göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} \text{Ker}\pi &= \{a \in G : \pi(a) = N\} \\ &= \{a \in G : aN = N\} \\ &= \{a \in G : a \in N\} \\ &= N \cap G \\ &= N \end{aligned}$$

elde edilir. ♦

Örnek 9.2.11 $\theta : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\theta(a) = (a + 2\mathbb{Z}, a + 5\mathbb{Z})$ şeklinde tanımlı θ homomorfizması verilmiş olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \text{Ker}\theta &= \{a \in \mathbb{Z} : \theta(a) = (0 + 2\mathbb{Z}, 0 + 5\mathbb{Z})\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} : (a + 2\mathbb{Z}, a + 5\mathbb{Z}) = (0 + 2\mathbb{Z}, 0 + 5\mathbb{Z})\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} : a + 2\mathbb{Z} = 0 + 2\mathbb{Z}, a + 5\mathbb{Z} = 0 + 5\mathbb{Z}\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} : a \in 2\mathbb{Z} \text{ ve } a \in 5\mathbb{Z}\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} : a \in 2\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z}\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} : a \in 10\mathbb{Z}\} \\ &= 10\mathbb{Z} \end{aligned}$$

olduğundan θ bir monomorfizma değildir. ▲

9.3 İzomorfizma Teoremleri

Teorem 9.3.1 (Birinci İzomorfizma Teoremi) *$\theta\colon G \longrightarrow G'$ bir grup homomorfizması olsun. Bu durumda*

$$G/Ker\theta \cong Im\theta$$

dır.

Sonuç 9.3.2 *$\theta : G \longrightarrow G'$ bir grup epimorfizması ise o zaman $G/Ker\theta \cong G'$ dur.*

Örnek 9.3.3 $\theta(a) = \overline{a}$ şeklinde tanımlı $\theta : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Her $a,\ b \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned}\theta(a+b) &= \overline{a+b}\\ &= \overline{a}+\overline{b}\\ &= \theta(a)+\theta(b)\end{aligned}$$

olduğundan θ bir homomorfizmadır. Ayrıca

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\theta &= \{a \in \mathbb{Z} : \theta(a) = \overline{0}\}\\ &= \{a \in \mathbb{Z} : \overline{a} = \overline{0}\}\\ &= \{a \in \mathbb{Z} : a \equiv 0 \pmod{n}\}\\ &= \{a \in \mathbb{Z} : n|a\}\\ &= \{a \in \mathbb{Z} : a = nk,\ k \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{nk : k \in \mathbb{Z}\}\\ &= n\mathbb{Z}\\ \mathrm{Im}\theta &= \{\theta(a) : a \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{\overline{a} : a \in \mathbb{Z}\}\\ &= \mathbb{Z}_n\end{aligned}$$

bulunur. Birinci İzomorfizma Teoremi gereğince $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ dir (Uyarı 9.2.7 de daha kuvvetli olarak aslında $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$ olduğunu göstermiştik). ▲

Teorem 9.3.4 (İkinci İzomorfizma Teoremi) *G bir grup, H ve K da G grubunun altgrupları, $K \trianglelefteq G$ olmak üzere,*

$$H/(H \cap K) \cong HK/K$$

dır.

Teorem 9.3.5 (Üçüncü İzomorfizma Teoremi) *G bir grup, H ve K da G grubunun normal altgrupları, $H \subseteq K \subseteq G$ olsun. Bu durumda,*

$$(G/H)/(K/H) \cong G/K$$

dır.