Bölüm 10

Grupların İç Direkt Toplamları

Bu bölümde verilen bir grubun altgrupları yardımıyla bazı ayrışımları araştırılacaktır. Burada gruplar toplamsal olarak ele alınacaktır.

10.1 Toplam Kümesi ve İç Direkt Toplam

Tanım 10.1.1 *G değişmeli bir grup ve $H_1, H_2, \ldots, H_n$ de G nin altgrupları olsun.*

$$H_1 + H_2 + \cdots + H_n := \{h_1 + h_2 + \cdots + h_n : \ i = 1, 2, \ldots, n \text{ için } h_i \in H_i\}$$

kümesine $H_1, H_2, \ldots, H_n$ altgruplarının **toplam kümesi** *adı verilir.*

Teorem 10.1.2 *G değişmeli bir grup ve G nin $H_1, H_2, \ldots, H_n$ altgrupları olsun. O zaman $H := H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ toplam kümesi G nin bir altgrubudur.*

Önerme 10.1.3 *G değişmeli bir grup ve G nin $H_1, H_2, \ldots, H_n$ altgrupları olsun. O zaman $G = H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ olması için gerek ve yeter şart $G = \langle \bigcup_{i=1}^{n} H_i \rangle$ olmasıdır.*

Örnek 10.1.4 $\mathbb{Z}_{12}$ grubunun $H_1 = \langle \overline{2} \rangle = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{0}\}$, $H_2 = \langle \overline{3} \rangle = \{\overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{0}\}$ ve $H_3 = \langle \overline{4} \rangle = \{\overline{4}, \overline{8}, \overline{0}\}$ altgruplarını göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} H_1 + H_2 &= \{h_1 + h_2 : h_1 \in H_1 \ , h_2 \in H_2\} \\ &= \{k\overline{2} + l\overline{3} : \ k, \ l \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\overline{k2 + l3} : \ k, \ l \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{m\overline{1} : \ m \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{Z}_{12} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} H_2+H_3 &= \{h_2+h_3: \ h_2\in H_2\ , h_3\in H_3\} \\ &= \{r\overline{3}+s\overline{4}: \ r, \ s\in\mathbb{Z}\} \\ &= \{\overline{r3+s4}: \ r, \ s\in\mathbb{Z}\} \\ &= \{t\overline{1}: \ t\in\mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{Z}_{12} \end{aligned}$$

olmasına rağmen

$$\begin{aligned} H_1+H_3 &= \{h_1+h_3: h_1\in H_1\ , h_3\in H_3\} \\ &= \{u\overline{2}+v\overline{4}: \ u, \ v\in\mathbb{Z}\} \\ &= \{\overline{u2+v4}: \ u, \ v\in\mathbb{Z}\} \\ &= \{\overline{u2+v2.2}: \ u, \ v\in\mathbb{Z}\} \\ &= \{\overline{2(u+v2)}: \ u, \ v\in\mathbb{Z}\} \\ &= \{n\overline{2}: n\in\mathbb{Z}\} \\ &= H_1 \end{aligned}$$

olup $H_1 \neq \mathbb{Z}_{12}$ dir. Bu sebeple bir grubun altgruplarının toplamları her zaman grubun kendisine eşit olmayabilir. ▲

Tanım 10.1.5 *G değişmeli bir grup, G nin $H_1, H_2, \ldots, H_n$ altgrupları ve $x \in H_1 + \cdots + H_n$ olsun. $x = h_1 + \cdots + h_n = h_1^{'} + \cdots + h_n^{'}$ şartını sağlayan her $h_1, \ h_1^{'} \in H_1, \ldots, h_n, \ h_n^{'} \in H_n$ için $h_1 = h_1^{'}, \ldots, h_n = h_n^{'}$ oluyorsa o zaman x in yazılışı* **tek türlüdür** *denir.*

Tanım 10.1.6 *G değişmeli bir grup ve G nin $H_1, \ H_2, \ \ldots, \ H_n$ altgrupları olsun. Eğer $x \in H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ için x in yazılışı tek türlü ise o zaman $H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ toplamına $H_1, \ldots, H_n$ altgruplarının* **(iç) direkt toplamı** *adı verilir ve*

$$H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$$

ile gösterilir.

Teorem 10.1.7 *G değişmeli bir grup ve G nin $H_1, \ H_2, \ \ldots, \ H_n$ sonlu altgrupları olsun. Bu durumda*

$$|H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n| = |H_1| \ |H_2| \ldots |H_n|$$

dir.

Teorem 10.1.8 *G değişmeli bir grup ve G nin $H_1, \ H_2, \ \ldots, \ H_n$ altgrupları olsun. Bu durumda $H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ toplamının direkt toplam olması için gerek ve yeter şart $h_1 + h_2 + \cdots + h_n = 0$ iken $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 0$ olmasıdır.*

Teorem 10.1.9 *G değişmeli bir grup ve $H_1, \ H_2 \leq G$ olsun. $G = H_1 \oplus H_2$ olması için gerek ve yeter şart*

(i) $G = H_1 + H_2$,

(ii) $H_1 \cap H_2 = \{0\}$

olmasıdır.

Örnek 10.1.10 $G := \mathbb{Z}_{12}$ grubunun $H_1 = \langle \overline{2} \rangle = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{0}\}$, $H_2 = \langle \overline{3} \rangle = \{\overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{0}\}$ ve $H_3 = \langle \overline{4} \rangle = \{\overline{4}, \overline{8}, \overline{0}\}$ altgrupları için $G = H_1 + H_2$ olmasına rağmen $H_1 \cap H_2 = \{\overline{0}, \overline{6}\} \neq \{\overline{0}\}$ olduğundan G grubu H_1 ve H_2 altgruplarının direkt toplamı değildir. Fakat $G = H_2 + H_3$ ve $H_2 \cap H_3 = \{\overline{0}\}$ olduğundan Teorem 10.1.9 gereğince $G = H_2 \oplus H_3$ tür. ▲

Sonuç 10.1.11 *G değişmeli bir grup ve H_1, H_2, $\ldots$, H_n, G nin altgrupları olsun. Bu durumda $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$ olması için gerek ve yeter şart*

(i) $G = H_1 + H_2 + \cdots + H_n$,

(ii) *Her $j = 1, 2, \ldots, n$ için* $H_j \cap (H_1 + \cdots + H_{j-1} + H_{j+1} + \cdots + H_n) = \{0\}$

olmasıdır.

Teorem 10.1.12 *G değişmeli bir grup ve H_1, $H_2 \leq G$ olsun. $G = H_1 \oplus H_2$ olmak üzere*

(i) $G/H_1 \cong H_2$,

(ii) $G/H_2 \cong H_1$

dir.

Örnek 10.1.13 $\mathbb{Z}_{12}$ grubunun $\langle \overline{3} \rangle$ ve $\langle \overline{4} \rangle$ altgruplarını göz önüne alalım. $\mathbb{Z}_{12} = \langle \overline{3} \rangle \oplus \langle \overline{4} \rangle$ olduğundan $\mathbb{Z}_{12}/\langle \overline{3} \rangle \cong \langle \overline{4} \rangle$ ve $\mathbb{Z}_{12}/\langle \overline{4} \rangle \cong \langle \overline{3} \rangle$ olur. ▲